Uma solução da primeira equação é $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Isso também satisfaz a segunda equação. (Por quê?) Logo, um autovetor de $\mathbf{A}$ correspondente a $\lambda_1 = -2{,}0$ é

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{Similarmente,} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} \tag{17}$$

é um autovetor de $\mathbf{A}$ correspondente a $\lambda_2 = -0{,}8$, conforme obtido a partir de (14*) com $\lambda = \lambda_2$. Verifique isso. ∎

4.1 Sistemas de EDOs como Modelos

Nesta seção, primeiro apresentaremos alguns exemplos típicos de situações onde as EDOs podem servir como modelos em diversas aplicações. Depois, mostraremos que uma EDO de ordem superior (com a derivada de maior ordem estando isolada num lado da equação) pode ser reduzida a um sistema de primeira ordem. Ambos esses fatos confirmam a importância prática desses sistemas.

EXEMPLO 1 Problema de Mistura Envolvendo Dois Tanques

Um problema de mistura envolvendo um único tanque pode ser modelado por uma única EDO, algo que se pode observar no Exemplo correspondente de número 3 na Seção 1.3, sendo que o princípio da modelagem será o mesmo para os dois tanques. O modelo será um sistema de duas EDOs de primeira ordem.

Na Fig. 77, os tanques T_1 e T_2 inicialmente contêm cada um 100 galões de água. Em T_1, a água é pura, ao passo que há 150 libras de fertilizante dissolvidas em T_2. Fazendo uma circulação do líquido a uma taxa de 2 galões/min e revolvendo a mistura (para mantê-la uniforme), as quantidades de fertilizante $y_1(t)$ em T_1 e $y_2(t)$ em T_2 se alteram com o tempo t. Por quanto tempo deveremos deixar o líquido circular de tal modo que T_1 conterá pelo menos a metade da quantidade de fertilizante que restará em T_2?

Solução. *Etapa 1.* **Elaboração do modelo.** Como para um único tanque, a taxa temporal de alteração $y_1'(t)$ de $y_1(t)$ é igual ao fluxo de entrada menos o fluxo de saída e algo similar ocorre para o tanque T_2. Da Fig. 77, vemos que

$$y_1' = \text{Entrada/min} - \text{Saída/min} = \frac{2}{100}y_2 - \frac{2}{100}y_1 \qquad \text{(Tanque } T_1\text{)}$$

$$y_2' = \text{Entrada/min} - \text{Saída/min} = \frac{2}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2 \qquad \text{(Tanque } T_2\text{)}$$

Logo, em nosso problema de mistura, o modelo matemático corresponde ao sistema de EDOs de primeira ordem

$$\begin{aligned} y_1' &= -0{,}02y_1 + 0{,}02y_2 \qquad &\text{(Tanque } T_1\text{)} \\ y_2' &= 0{,}02y_1 - 0{,}02y_2 \qquad &\text{(Tanque } T_2\text{)} \end{aligned}$$

Assumindo a forma de uma equação vetorial com o vetor-coluna $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e a matriz $\mathbf{A}$, isso se torna

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \text{onde} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02 \end{bmatrix}.$$

Etapa 2. **Solução geral.** Como no caso de uma equação única, tentemos uma função exponencial de t.

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t}. \qquad \text{Então,} \qquad \mathbf{y}' = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t}. \tag{1}$$

Dividindo a última equação $\lambda\mathbf{x}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t}$ por $e^{\lambda t}$ e trocando os lados direito e esquerdo, obtemos

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

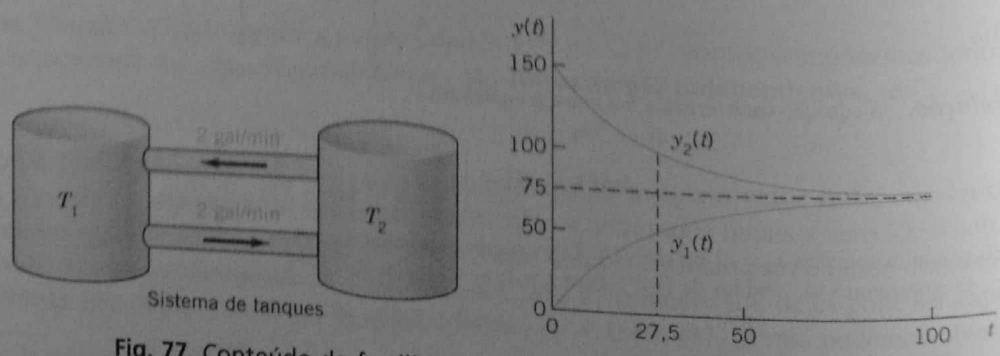


Fig. 77. Conteúdo de fertilizante nos Tanques T_1 (curva inferior) e T_2

Scanned by CamScanner

Precisamos de soluções não-triviais (soluções que não sejam identicamente nulas). Logo, temos que procurar os autovalores e os autovetores de **A**. Os autovalores são as soluções da equação característica

$$\text{(2)} \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -0{,}02 - \lambda & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02 - \lambda \end{vmatrix} = (-0{,}02 - \lambda)^2 - 0{,}02^2 = \lambda(\lambda + 0{,}04) = 0.$$

Vemos que $\lambda_1 = 0$ (algo que pode perfeitamente acontecer — não se confunda —, pois são os *autovetores* que não podem ser nulos) e $\lambda_2 = -0{,}04$. Os autovetores são obtidos de (14*) na Seção 4.0 com $\lambda = 0$ e $\lambda = -0{,}04$. Para nossa matriz **A** deste caso, isso fornece [precisamos somente da primeira equação em (14*)]

$$-0{,}02x_1 + 0{,}02x_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad (-0{,}02 + 0{,}04)x_1 + 0{,}02x_2 = 0,$$

respectivamente. Logo, $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$, respectivamente, e podemos fazer $x_1 = x_2 = 1$ e $x_1 = -x_2 = 1$. Isso fornece dois autovetores correspondentes a, respectivamente, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -0{,}04$, a saber,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De (1) e do princípio da superposição (que continua a vigorar nos sistemas de EDOs lineares homogêneas), obtemos então uma solução

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{y} = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-0{,}04t}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Mais tarde, chamaremos isso de uma **solução geral.**

***Etapa 3.* Uso das condições iniciais.** As condições iniciais são $y_1(0) = 0$ (nenhum fertilizante no tanque T_1) e $y_2(0) = 150$. Disso e de (3) com $t = 0$, obtemos

$$\mathbf{y}(0) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix}.$$

Em componentes, isso corresponde a $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 - c_2 = 150$. A solução é $c_1 = 75$, $c_2 = -75$. Isso fornece a resposta

$$\mathbf{y} = 75\mathbf{x}^{(1)} - 75\mathbf{x}^{(2)}e^{-0{,}04t} = 75\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 75\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-0{,}04t}.$$

Em componentes,

$$y_1 = 75 - 75e^{-0{,}04t} \qquad \text{(Tanque } T_1\text{, curva inferior)}$$

$$y_2 = 75 + 75e^{-0{,}04t} \qquad \text{(Tanque } T_2\text{, curva superior).}$$

A Fig. 77 mostra o aumento exponencial de y_1 e o decréscimo exponencial de y_2 ao limite comum de 75 libras. Você esperava que isso acontecesse por razões físicas? E conseguiria explicar fisicamente por que as curvas parecem "simétricas"? O limite se alteraria se inicialmente T_1 contivesse 100 libras de fertilizante e T_2 contivesse 50 libras?

***Etapa 4.* Resposta.** T_1 conterá a metade da quantidade de fertilizante de T_2 se T_1 contiver 1/3 da quantidade total, ou seja, 50 libras. Portanto,

$$y_1 = 75 - 75e^{-0{,}04t} = 50, \qquad e^{-0{,}04t} = \tfrac{1}{3}, \qquad t = (\ln 3)/0{,}04 = 27{,}5.$$

Logo, o fluido deve circular pelo menos por cerca de meia hora. ■

EXEMPLO 2 Circuito elétrico

Encontre as correntes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ no circuito elétrico mostrado na Fig. 78. Suponha que todas as correntes e cargas sejam nulas em $t = 0$, instante em que a chave é ligada.

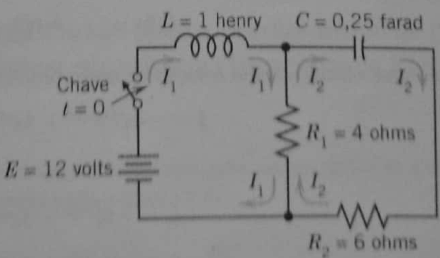


Fig. 78. Circuito elétrico do Exemplo 2

Solução. ***Etapa 1.* Elaboração do modelo matemático.** O modelo desse circuito é obtido da lei da voltagem de Kirchhoff, conforme vimos na Seção 2.9 (onde consideramos os circuitos de uma única malha). Chamemos de $I_1(t)$ e $I_2(t)$ as correntes nas malhas esquerda e direita, respectivamente. Na malha esquerda, as quedas de tensão correspondem a $LI_1' = I_1'$ [V] no indutor e a $R_1(I_1 - I_2) = 4(I_1 - I_2)$ [V] no

Scanned by CamScanner

resistor, havendo o sinal negativo porque $I_1(t)$ e $I_2(t)$ fluem através do resistor em sentidos opostos. Segundo a lei da voltagem de Kirchhoff, a soma dessas quedas é igual à voltagem da bateria; ou seja, $I_1' + 4(I_1 - I_2) = 12$, logo,

(4a) $$I_1' = -4I_1 + 4I_2 + 12.$$

Na malha direita, as quedas de tensão correspondem a $R_2 I_2 = 6I_2$ [V] e $R_1(I_2 - I_1) = 4(I_2 - I_1)$ [V] nos resistores, e a $(1/C)\int I_2\,dt = 4\int I_2\,dt$ [V] no capacitor, sendo sua soma igual a zero,

$$6I_2 + 4(I_2 - I_1) + 4\int I_2\,dt = 0 \qquad \text{ou} \qquad 10I_2 - 4I_1 + 4\int I_2\,dt = 0.$$

Dividindo por 10 e derivando, obtemos $I_2' - 0{,}4I_1' + 0{,}4I_2 = 0$.

Para simplificarmos o processo de solução, primeiro eliminamos $0{,}4I_1'$, o que, por (4a), se iguala a $0{,}4(-4I_1 + 4I_2 + 12)$. A substituição na EDO existente fornece

$$I_2' = 0{,}4I_1' - 0{,}4I_2 = 0{,}4(-4I_1 + 4I_2 + 12) - 0{,}4I_2$$

e, por simplificação,

(4b) $$I_2' = -1{,}6I_1 + 1{,}2I_2 + 4{,}8.$$

Em forma matricial, (4) é (escrevemos **J**, visto que **I** se refere à matriz unitária)

(5) $$\mathbf{J}' = \mathbf{AJ} + \mathbf{g}, \qquad \text{onde} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4{,}0 & 4{,}0 \\ -1{,}6 & 1{,}2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 12{,}0 \\ 4{,}8 \end{bmatrix}.$$

***Etapa 2*. Resolução de (5).** Devido ao vetor **g**, trata-se de um sistema *não-homogêneo*, de modo que tentamos proceder como fizemos para uma EDO única, resolvendo primeiro o sistema *homogêneo* $\mathbf{J}' = \mathbf{AJ}$ (portanto, $\mathbf{J}' - \mathbf{AJ} = \mathbf{0}$), substituindo $\mathbf{J} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$. Isso fornece

$$\mathbf{J}' = \lambda \mathbf{x}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t}, \qquad \text{logo,} \qquad \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}.$$

Logo, para obtermos uma solução não-trivial, de novo precisamos dos autovalores e dos autovetores. Para a matriz **A** que temos agora, estes são obtidos da mesma forma que no Exemplo 1 da Seção 4.0:

$$\lambda_1 = -2, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda_2 = -0{,}8, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Portanto, uma "solução geral" do sistema homogêneo é

$$\mathbf{J}_h = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{-2t} + c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{-0{,}8t}.$$

Para uma solução particular do sistema não-homogêneo (5), visto que **g** é constante, fazemos uma tentativa com um vetor-coluna constante $\mathbf{J}_p = \mathbf{a}$ com componentes a_1, a_2. Então, $\mathbf{J}_p' = \mathbf{0}$, e fazendo uma substituição em (5), obtemos $\mathbf{Aa} + \mathbf{g} = \mathbf{0}$; em componentes,

$$-4{,}0a_1 + 4{,}0a_2 + 12{,}0 = 0$$
$$-1{,}6a_1 + 1{,}2a_2 + 4{,}8 = 0.$$

A solução é $a_1 = 3$, $a_2 = 0$; portanto, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo,

(6) $$\mathbf{J} = \mathbf{J}_h + \mathbf{J}_p = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{-2t} + c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{-0{,}8t} + \mathbf{a};$$

em componentes,

$$I_1 = 2c_1e^{-2t} + c_2e^{-0{,}8t} + 3$$
$$I_2 = c_1e^{-2t} + 0{,}8c_2e^{-0{,}8t}.$$

As condições iniciais fornecem

$$I_1(0) = 2c_1 + c_2 + 3 = 0$$
$$I_2(0) = c_1 + 0{,}8c_2 = 0.$$

Logo, $c_1 = -4$ e $c_2 = 5$. Portanto, obtemos como solução de nosso problema:

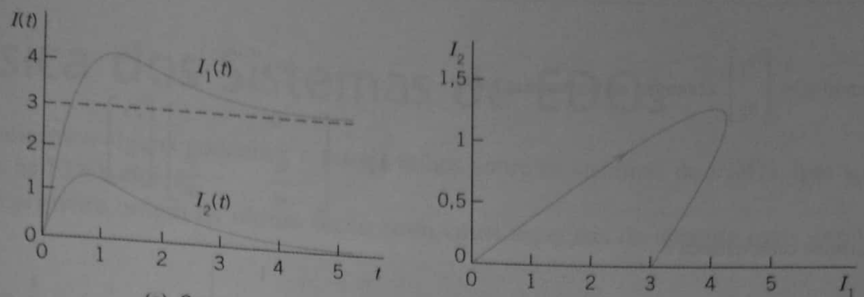
(7) $$\mathbf{J} = -4\mathbf{x}^{(1)}e^{-2t} + 5\mathbf{x}^{(2)}e^{-0{,}8t} + \mathbf{a}.$$

Em componentes (Fig. 79b),

$$I_1 = -8e^{-2t} + 5e^{-0{,}8t} + 3$$
$$I_2 = -4e^{-2t} + 4e^{-0{,}8t}.$$

Agora, vem-nos uma idéia importante, que detalharemos mais tarde, a partir da Seção 4.3. A Fig. 79a mostra $I_1(t)$ e $I_2(t)$ como duas curvas distintas. A Fig. 79b mostra essas duas correntes como uma única curva $[I_1(t), I_2(t)]$ no plano I_1-I_2. Trata-se de uma representação paramétrica, com o tempo t sendo o parâmetro. Freqüentemente, é importante saber em que sentido uma curva como essa é traçada. Isso pode ser indicado por uma seta no sentido de t crescente, como mostra a figura. O plano I_1-I_2 é chamado de **plano de fase** do nosso sistema (5) e a curva na Fig. 79b é chamada de **trajetória**. Veremos que essas **"representações do plano de fase"** são, de longe, mais importantes que os gráficos

Scanned by CamScanner



(a) Correntes I_1 (curva superior) e I_2

(b) Trajetória $[I_1(t), I_2(t)]^T$ no plano I_1I_2 (o "plano de fase")

Fig. 79. Correntes do Exemplo 2

como os mostrados na Fig. 79a, porque elas são muito mais eficientes em nos dar uma impressão geral qualitativa do comportamento geral de famílias inteiras de soluções, em vez de simplesmente mostrarem uma solução, como no caso presente. ■

Conversão de uma EDO de *n*-ésima Ordem num Sistema

Mostraremos agora que uma EDO de n-ésima ordem com a forma geral (8) (veja o Teorema 1) pode ser convertida em um sistema de n EDOs de primeira ordem. Isso se reveste de uma importância tanto prática quanto teórica — tem uma importância prática porque permite o estudo e a solução de EDOs únicas através de métodos de sistemas; e tem uma importância teórica porque possibilita a inclusão da teoria das EDOs de ordem superior na teoria dos sistemas de primeira ordem. Essa conversão é um outro motivo da importância dos sistemas, além de sua utilização como modelos em diversas aplicações básicas. A idéia da conversão é simples e direta, como podemos ver a seguir.

TEOREMA 1

Conversão de uma EDO

Pode-se converter uma EDO de n-ésima ordem

(8)
$$y^{(n)} = F(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

num sistema de n EDOs de primeira ordem fazendo-se

(9)
$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)}.$$

Esse sistema é da forma

(10)
$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{aligned}$$

PROVA As $n-1$ primeiras equações dessas n EDOs são obtidas imediatamente de (9) por derivação. Além disso, de (9) temos que $y_n' = y^{(n)}$, de modo que a última equação em (10) resulta da EDO (8) dada. ■

EXEMPLO 3 **Massa numa Mola**

Para nos certificarmos de que o método da conversão realmente funciona, vamos aplicá-lo a um caso velho conhecido nosso, modelando os movimentos livres de uma massa presa a uma mola (veja a Seção 2.4)

$$my'' + cy' + ky = 0 \qquad \text{ou} \qquad y'' = -\frac{c}{m}y' - \frac{k}{m}y.$$

Para essa EDO (8), o sistema (10) é linear e homogêneo,

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2. \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

Fazendo $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, obtemos, na forma matricial,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

A equação característica é

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0.$$

Ela concorda com o que vimos na Seção 2.4. Ilustremos um cálculo, fazendo $m = 1$, $c = 2$, e $k = 0{,}75$. Portanto,

$$\lambda^2 + 2\lambda + 0{,}75 = (\lambda + 0{,}5)(\lambda + 1{,}5) = 0.$$

Isso nos fornece os autovalores $\lambda_1 = -0{,}5$ e $\lambda_2 = -1{,}5$. Os autovetores são obtidos da primeira equação em $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$, que é $-\lambda x_1 + x_2 = 0$. Para λ_1, isso fornece $0{,}5x_1 + x_2 = 0$, digamos, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Para $\lambda_2 = -1{,}5$, isso nos fornece $1{,}5x_1 + x_2 = 0$, digamos, $x_1 = 1$, $x_2 = -1{,}5$. Esses autovetores

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}5 \end{bmatrix} \quad \text{dão} \quad \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0{,}5t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}5 \end{bmatrix} e^{-1{,}5t}.$$

Essa solução vetorial tem o primeiro componente

$$y = y_1 = 2c_1e^{-0{,}5t} + c_2e^{-1{,}5t}$$

que é a solução esperada. O segundo componente é sua derivada

$$y_2 = y_1' = y' = -c_1e^{-0{,}5t} - 1{,}5\,c_2e^{-1{,}5t}.$$