(b) **Equação de Rayleigh.** Mostre que a chamada equação de Rayleigh[5]

$$Y'' - \mu(1 - \tfrac{1}{3}Y'^2)Y' + Y = 0 \quad (\mu > 0)$$

também descreve as oscilações auto-excitadas e que, derivando-a e fazendo-se $y = Y'$, obtém-se a equação de van der Pol.

(c) **Equação de Duffing.** A equação de Duffing é

$$y'' + \omega_0^2 y + \beta y^3 = 0$$

onde usualmente $|\beta|$ é pequeno, caracterizando, portanto, um pequeno desvio que a força restauradora tem da linearidade. Os casos $\beta > 0$ e $\beta < 0$ são, respectivamente, chamados de *mola dura* e *mola macia*. Obtenha a equação das trajetórias no plano de fase. (Note que para $\beta > 0$ todas essas curvas são fechadas.)

4.6 Sistemas Lineares Não-homogêneos de EDOs

Nesta última seção do Capítulo 4, discutiremos os métodos de resolução dos sistemas lineares não-homogêneos das EDOs

(1)
$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$$
(veja a Seção 4.2)

onde o vetor $\mathbf{g}(t)$ não é identicamente nulo. Supomos que $\mathbf{g}(t)$ e os elementos da matriz $\mathbf{A}(t)$ $n \times n$ sejam contínuos em algum intervalo J do eixo t. A partir de uma solução geral $\mathbf{y}^{(h)}(t)$ do sistema homogêneo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ em J e de uma solução particular $\mathbf{y}^{(p)}(t)$ de (1) em J [isto é, uma solução de (1) não contendo nenhuma constante arbitrária], obtemos uma solução de (1),

(2)
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)}.$$

Dizemos que $\mathbf{y}$ é uma **solução geral** de (1) em J porque inclui todas as soluções de (1) em J. Isso é decorrente do Teorema 2 da Seção 4.2 (veja o Problema 1 da presente seção).

Tendo estudado os sistemas lineares homogêneos nas Seções 4.1–4.4, nossa tarefa agora será explicar métodos de obter soluções particulares de (1). Discutiremos o método dos coeficientes a determinar e o método da variação dos parâmetros, que têm contrapartes referentes às EDOs únicas, já vistas nas Seções 2.7 e 2.10.

Método dos Coeficientes a Determinar

Como ocorre com as EDOs únicas, esse método é adequado quando os elementos da matriz $\mathbf{A}$ são constantes e os componentes de $\mathbf{g}$ são constantes, potências inteiras positivas de t, funções exponenciais ou senos e co-senos. Em casos assim, supomos que uma solução particular $\mathbf{y}^{(p)}$ tenha uma forma similar a $\mathbf{g}$; por exemplo, $\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{u} + \mathbf{v}t + \mathbf{w}t^2$ se $\mathbf{g}$ tiver componentes quadráticos em t, com $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ a serem determinados por substituição em (1). Isto é similar à Seção 2.7, excetuando-se pela Regra da Modificação. Aqui é suficiente mostrarmos isso através de um exemplo.

EXEMPLO 1 Método dos Coeficientes a Determinar. Regra da Modificação

Encontre uma solução geral de

(3)
$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Solução. Uma equação geral do sistema homogêneo é (veja o Exemplo 1 da Seção 4.3)

(4)
$$\mathbf{y}^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}.$$

Uma vez que $\lambda = -2$ é um autovalor de $\mathbf{A}$, a função e^{-2t} no lado direito também aparece em $\mathbf{y}^{(h)}$, de modo que precisamos aplicar a Regra de Modificação fazendo

$$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{u}te^{-2t} + \mathbf{v}e^{-2t} \qquad \text{(em vez de } \mathbf{u}e^{-2t}\text{)}.$$

[5] LORDE RAYLEIGH (JOHN WILLIAM STRUTT) (1842-1919), grande físico e matemático inglês, professor das Universidades de Cambridge e Londres, conhecido por suas importantes contribuições à teoria ondulatória, da eletricidade, hidrodinâmica e diversos outros ramos da matemática aplicada e da física teórica. Em 1904, recebeu o Prêmio Nobel de Física.

Observe que o primeiro desses dois termos é o análogo da modificação feita na Seção 2.7, porém isso aqui não seria suficiente. (Ch... lo.) Por substituição,

$$\mathbf{y}^{(p)\prime} = \mathbf{u}e^{-2t} - 2\mathbf{u}te^{-2t} - 2\mathbf{v}e^{-2t} = \mathbf{Au}te^{-2t} + \mathbf{Av}e^{-2t} + \mathbf{g}.$$

Igualando os termos em te^{-2t} de ambos os lados, temos $-2\mathbf{u} = \mathbf{Au}$. Logo, $\mathbf{u}$ é um autovetor de $\mathbf{A}$ correspondente a $\lambda = -2$; portanto, $\mathbf{u} = a[1 \quad 1]^{\mathsf{T}}$ com um valor qualquer de $a \neq 0$. Igualando os outros termos, obtemos

$$\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \mathbf{Av} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{portanto,} \qquad \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3v_1 + v_2 \\ v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Agrupando e reordenando os termos, chegamos a

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= -a - 6 \\ -v_1 + v_2 &= -a + 2. \end{aligned}$$

Somando, $0 = -2a - 4$, $a = -2$ e então $v_2 = v_1 + 4$, digamos, $v_1 = k$, $v_2 = k + 4$, portanto, $\mathbf{v} = [k \quad k + 4]^{\mathsf{T}}$. Podemos simp... escolher $k = 0$. Isso nos dá a *resposta*

(5)
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Para outro valor de k, teríamos um outro $\mathbf{v}$; por exemplo, $k = -2$ dá $\mathbf{v} = [-2 \quad 2]^{\mathsf{T}}$, de modo que a *resposta* passa a ser

(5*)
$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t},$$

Método da Variação dos Parâmetros

Esse método pode ser aplicado a sistemas lineares não-homogêneos

(6)
$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$$

com a matriz $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ variável e um termo $\mathbf{g}(t)$ geral. Ele fornece uma solução particular $\mathbf{y}^{(p)}$ de (6) em um intervalo aberto J do eixo t caso se conheça uma solução do sistema homogêneo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ em J. Explica... esse método usando o exemplo anterior.

EXEMPLO 2 Solução pelo Método da Variação dos Parâmetros

Resolva (3) no Exemplo 1.

Solução. Uma base de soluções do sistema homogêneo é $[e^{-2t} \quad e^{-2t}]^{\mathsf{T}}$ e $[e^{-4t} \quad -e^{-4t}]^{\mathsf{T}}$. Logo, podemos escrever a solução g... do sistema homogêneo como

(7)
$$\mathbf{y}^{(h)} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}.$$

Aqui, $\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{y}^{(1)} \quad \mathbf{y}^{(2)}]^{\mathsf{T}}$ é a matriz fundamental (veja a Seção 4.2). Como na Seção 2.10, substituímos o vetor constante c por um... variável $\mathbf{u}(t)$ de modo a obtermos uma solução particular

$$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{u}(t).$$

Substituindo essa expressão em (3) $\mathbf{y}' = \mathbf{Ay} + \mathbf{g}$, temos

(8)
$$\mathbf{Y}'\mathbf{u} + \mathbf{Yu}' = \mathbf{AYu} + \mathbf{g}.$$

Agora, uma vez que $\mathbf{y}^{(1)}$ e $\mathbf{y}^{(2)}$ são soluções do sistema homogêneo, temos

$$\mathbf{y}^{(1)\prime} = \mathbf{Ay}^{(1)}, \qquad \mathbf{y}^{(2)\prime} = \mathbf{Ay}^{(2)}, \qquad \text{portanto,} \qquad \mathbf{Y}' = \mathbf{AY}.$$

Logo, $\mathbf{Y}'\mathbf{u} = \mathbf{AYu}$, de modo que (8) se reduz a

$$\mathbf{Yu}' = \mathbf{g}. \qquad \text{A solução é} \qquad \mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g};$$

aqui, usamos o fato de que a matriz inversa $\mathbf{Y}^{-1}$ de $\mathbf{Y}$ (Seção 4.0) existe porque o determinante de $\mathbf{Y}$ é o wronskiano W, que é diferente de zero para uma base. A Equação (9) na Seção 4.0 fornece a forma de $\mathbf{Y}^{-1}$,

$$\mathbf{Y}^{-1} = \frac{1}{-2e^{-6t}} \begin{bmatrix} -e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Multiplicamos isso por $\mathbf{g}$, obtendo

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 \\ -8e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

A integração é feita termo a termo (como na derivação) e fornece

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2\tilde{t}} \end{bmatrix} d\tilde{t} = \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix}$$

(onde o número + 2 provém do limite inferior da integração). Disso e de $\mathbf{Y}$ em (7), obtemos

$$\mathbf{Yu} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^{-2t} - 2e^{-2t} + 2e^{-4t} \\ -2te^{-2t} + 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t - 2 \\ -2t + 2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}.$$

O último termo no lado direito é uma solução do sistema homogêneo. Logo, podemos absorvê-lo em $\mathbf{y}^{(h)}$. Portanto, obtemos como uma solução geral do sistema (3) e em concordância com (5*),

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}. \tag{9}$$

■