

### EXEMPLO 3 Nível Hormonal

Considere que o nível de um certo hormônio no sangue de um paciente varie com o tempo. Suponha que a taxa temporal dessa variação seja a diferença entre uma entrada senoidal (com um período de 24 h) da glândula tireóide e uma taxa contínua de remoção, proporcional ao nível presente de hormônio. Elabore um modelo para o nível de hormônio no sangue e obtenha sua respectiva solução geral. Obtenha a solução particular que satisfaça a uma condição inicial adequada.

**Solução. Etapa 1. Elaboração de um modelo.** Consideremos que  $y(t)$  seja o nível de hormônio num instante  $t$ . Dessa forma, a taxa de remoção é igual a  $Ky(t)$ . Por sua vez, a taxa de entrada corresponde a  $A + B \cos(2\pi t/24)$ , onde  $A$  é a taxa média de entrada, e  $A \geq B$ , para fazer com que a entrada seja não-negativa. (As constantes  $A$ ,  $B$  e  $K$  podem ser determinadas através de medidas laboratoriais.) Dessa forma, o modelo é

$$y'(t) = \text{Entrada} - \text{Saída} = A + B \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - Ky(t) \quad \text{ou} \quad y' + Ky = A + B \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right).$$

A condição inicial para uma solução particular  $y_{\text{part}}$  é  $y_{\text{part}}(0) = y_0$ , com  $t = 0$  escolhido adequadamente, como, por exemplo, 6 h da manhã.

**Etapa 2. Solução geral.** Em (4), temos que  $p = K = \text{const.}$ ,  $h = Kt$  e  $r = A + B \cos(\frac{\pi t}{12})$ . Dessa forma, (4) nos dá a solução geral

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-Kt} \int e^{Kt} \left( A + B \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right) dt + ce^{-Kt} \\ &= e^{-Kt} e^{Kt} \left[ \frac{A}{K} + \frac{B}{144K^2 + \pi^2} \left( 144K \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + 12\pi \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right) \right] + ce^{-Kt} \\ &= \frac{A}{K} + \frac{B}{144K^2 + \pi^2} \left( 144K \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + 12\pi \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right) + ce^{-Kt}. \end{aligned}$$

O último termo vai caindo para 0 à medida que  $t$  aumenta; na prática, isso acontece após um curto intervalo de tempo e não depende de  $c$  (ou seja, da condição inicial). A outra parte de  $y(t)$  é chamada de **solução de regime estacionário**, devido ao fato de que ela consiste de termos constantes e periódicos. A solução inteira é chamada de **solução de regime transiente**, porque ela modela a transição do repouso para o regime estacionário. Esses termos são utilizados de uma maneira bastante geral em sistemas físicos e de outra natureza, em que o comportamento é dependente do tempo.

**Etapa 3. Solução particular.** Fazendo  $t = 0$  em  $y(t)$  e escolhendo  $y_0 = 0$ , obtemos

$$y(0) = \frac{A}{K} + \frac{B}{144K^2 + \pi^2} \cdot 144K + c = 0, \quad \text{portanto} \quad c = -\frac{A}{K} - \frac{B}{144K^2 + \pi^2} \cdot 144K.$$

Inserindo esse resultado em  $y(t)$ , obtemos a solução particular

$$y_{\text{part}}(t) = \frac{A}{K} + \frac{B}{144K^2 + \pi^2} \left( 144K \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + 12\pi \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right) - \left( \frac{A}{K} + \frac{144KB}{144K^2 + \pi^2} \right) e^{-Kt}$$

com a parte relativa ao regime estacionário expressa como antes. Para representarmos graficamente  $y_{\text{part}}$ , precisamos especificar os valores das constantes, ou seja, fazer  $A = B = 1$  e  $K = 0,05$ . A Figura 17 mostra essa solução. Observe que o período de transição é relativamente curto (embora  $K$  seja pequeno) e a curva rapidamente assume uma aparência senoidal; esta é a resposta à entrada  $A + B \cos(\frac{\pi t}{12}) = 1 + \cos(\frac{\pi t}{12})$ . ■

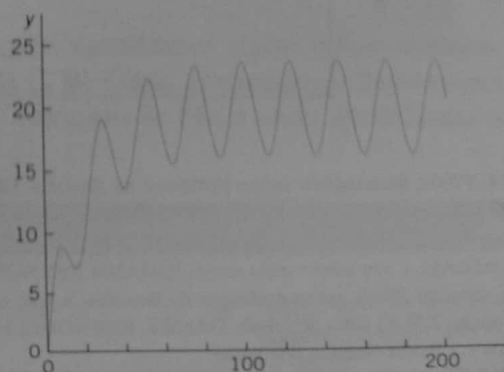


Fig. 17. Solução particular do Exemplo 3

## Redução à Forma Linear. Equação de Bernoulli

É possível modelar um grande número de aplicações passando EDOs não-lineares para a forma linear. Um desses tipos de equação, que é de grande utilidade, é a **equação de Bernoulli**<sup>5</sup>

$$(6) \quad y' + p(x)y = g(x)y^a \quad (a \text{ é um número real qualquer}).$$

Se  $a = 0$  ou  $a = 1$ , a Equação (6) é linear. De outro modo, ela é não-linear. Dessa forma, escrevemos

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}.$$

Diferenciando essa última expressão e substituindo  $y'$  a partir de (6), obtemos

$$u' = (1 - a)y^{-a}y' = (1 - a)y^{-a}(gy^a - py).$$

Simplificando, chegamos a

$$u' = (1 - a)(g - py^{1-a}),$$

onde  $y^{1-a} = u$  no lado direito, o que nos faz chegar à EDO

$$(7) \quad u' + (1 - a)pu = (1 - a)g.$$

Para outras EDOs reduzíveis à forma linear, veja a clássica referência de Ince [A11] no Apêndice 1. Veja também o Projeto de Equipe 44 nos Problemas Propostos 1.5.

## Aplicação: Vigas Elásticas

Se, por um lado, as EDOs de segunda ordem possuem diversas aplicações (e já vimos algumas das mais importantes), as EDOs de ordem superior ocorrem muito mais raramente nos problemas reais de engenharia. Entretanto, há uma importante EDO de quarta ordem que governa o envergamento de vigas elásticas, como as vigas de madeira ou ferro utilizadas em prédios e pontes.

As vibrações das vigas serão consideradas na Seção 12.3.

### EXEMPLO 3 Envergamento de uma Viga Elástica Submetida a uma Carga

Consideremos uma viga  $V$  de comprimento  $L$  e com uma seção transversal constante (p. ex., **retangular**), constituída de material elástico homogêneo (p. ex., aço); (veja a Fig. 75). Supomos que, sob seu próprio peso, a viga se deforma tão pouco que praticamente pode ser considerada como reta. Se aplicarmos uma carga a  $V$  num plano vertical passando por seu eixo de simetria (o eixo  $x$  na Fig. 75),  $V$  sofre uma curvatura. Seu eixo ficará então arqueado segundo a chamada **curva elástica  $C$**  (ou **curva de deflexão**). De acordo com a teoria da elasticidade, pode-se provar que o momento da inclinação  $M(x)$  é proporcional à curvatura  $k(x)$  de  $C$ . Suponhamos que a curvatura seja pequena, de modo que a deflexão  $y(x)$  e sua derivada  $y'(x)$  (que determina a direção da tangente a  $C$ ) também sejam pequenas. Então, através do cálculo, obtemos  $k = y''/(1 + y'^2)^{3/2} \approx y''$ . Daí,

$$M(x) = EIy''(x).$$

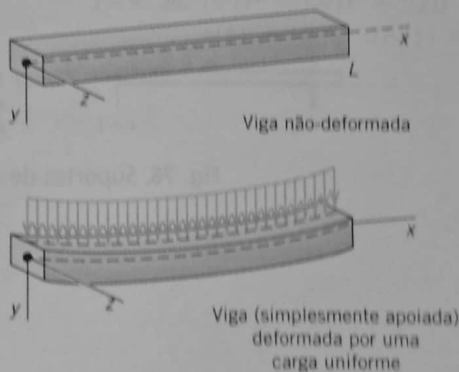


Fig. 75. Viga elástica

$EI$  é a constante de proporcionalidade. O valor  $E$  corresponde ao módulo de elasticidade e  $I$  ao momento de inércia da seção transversal em torno do eixo  $z$  (horizontal) na Fig. 75. Pela teoria da elasticidade, também é possível mostrar que  $M''(x) = f(x)$ , onde  $f(x)$  é a carga por unidade de comprimento. Juntando essas informações, temos que:

$$EIy^{iv} = f(x).$$

(8)

Os tipos de apoio de maior importância prática para essas estruturas, com suas correspondentes condições de contorno, são os seguintes (veja a Fig. 76).

- (A) Simplesmente apoiada
- (B) Engastada em ambas as extremidades
- (C) Engastada em  $x = 0$ , livre em  $x = L$

A condição de contorno  $y = 0$  significa que não ocorre nenhum deslocamento nesse ponto;  $y' = 0$  significa que a tangente é horizontal. O que quer dizer que não há momento fletor e  $y'' = 0$  indica que não há força de cisalhamento.

Aplicamos isso ao caso da viga simplesmente apoiada e com carga uniforme, mostrada na Fig. 75. A carga é  $f(x) \equiv f_0 = \text{const.}$

(8) é

$$EIy^{iv} = k, \quad k = \frac{f_0}{EI}.$$

(9)

Trata-se de uma equação que pode ser facilmente resolvida através do cálculo. Duas integrações fazem-nos chegar a

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 + c_1x + c_2.$$

$y'' = 0$  resulta em  $c_2 = 0$ . Então,  $y''(L) = L(\frac{k}{2}L + c_1) = 0$ ,  $c_1 = -kL/2$  (desde que  $L \neq 0$ ). Portanto,

$$y'' = \frac{k}{2}(x^2 - Lx).$$

Integrando essa expressão duas vezes, obtemos

$$y = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{12}x^4 - \frac{L}{6}x^3 + c_3x + c_4 \right)$$

com  $c_4 = 0$  de  $y(0)$ . Então,

$$y(L) = \frac{kL}{2} \left( \frac{L^3}{12} - \frac{L^3}{6} + c_3 \right) = 0, \quad c_3 = \frac{L^3}{12}.$$

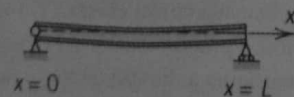
Inserindo a expressão para  $k$ , chegamos à solução

$$y = \frac{f_0}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x).$$

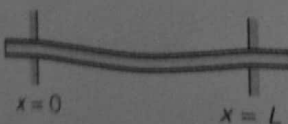
Uma vez que as condições de contorno em ambas as extremidades são as mesmas, esperamos que a deflexão  $y(x)$  seja "simétrica" em  $x = L/2$ , ou seja,  $y(x) = y(L - x)$ . Verifique isso diretamente ou faça  $x = u + L/2$  e mostre que  $y$  torna-se uma função par de  $u$ .

$$ny = \frac{f_0}{24EI} \left( u^2 - \frac{1}{4}L^2 \right) \left( u^2 - \frac{5}{4}L^2 \right).$$

Com base no que obtivemos, podemos ver que a máxima deflexão ocorrendo no meio da viga, em  $u = 0$  ( $x = L/2$ ), é igual a  $5f_0L^4/384EI$ . Lembre-se de que a direção positiva neste caso aponta para baixo.



(A) Simplesmente apoiada



(B) Engastada em ambas as extremidades



(C) Engastada na extremidade esquerda, com a extremidade direita livre

Fig. 76. Suportes de uma viga