... movem-se com relação à sua localização, como funções de ... Escreva um breve relatório sobre isso.

(e) Uma **função geratriz** (veja sua definição em Problemas Propostos 5.3) para os polinômios de Laguerre é

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n(t)x^n = (1-x)^{-1}e^{tx/(x-1)}.$$

Obtenha $l_0, \ldots, l_{10}$ a partir da soma parcial correspondente dessa série de potências em x e compare os termos l_n com os de (a), (b) ou (c).

6.7 Sistemas de EDOs

O método da transformada de Laplace pode também ser usado para resolver sistemas de EDOs, como explicaremos através de aplicações usuais. Consideremos um sistema linear de primeira ordem com coeficientes constantes (conforme discutimos na Seção 4.1)

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(t) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(t). \end{aligned}$$

Escrevendo $Y_1 = \mathcal{L}(y_1)$, $Y_2 = \mathcal{L}(y_2)$, $G_1 = \mathcal{L}(g_1)$, $G_2 = \mathcal{L}(g_2)$, obtemos de (1) da Seção 6.1 o sistema subsidiário

$$\begin{aligned} sY_1 - y_1(0) &= a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + G_1(s) \\ sY_2 - y_2(0) &= a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + G_2(s). \end{aligned}$$

Agrupando os termos em Y_1 e Y_2, temos

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} (a_{11} - s)Y_1 + \quad a_{12}Y_2 &= -y_1(0) - G_1(s) \\ a_{21}Y_1 \quad + (a_{22} - s)Y_2 &= -y_2(0) - G_2(s). \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema algebricamente para $Y_1(s)$, $Y_2(s)$ e tomando a transformada inversa, obtemos a solução $y_1 = \mathcal{L}^{-1}(Y_1)$, $y_2 = \mathcal{L}^{-1}(Y_2)$ do sistema dado (1).

Note que é possível escrever (1) e (2) na forma vetorial (ocorrendo algo similar para os sistemas nos exemplos dados); portanto, fazendo $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2]^\mathsf{T}$, $\mathbf{A} = [a_{jk}]$, $\mathbf{g} = [g_1 \quad g_2]^\mathsf{T}$, $\mathbf{Y} = [Y_1 \quad Y_2]^\mathsf{T}$, $\mathbf{G} = [G_1 \quad G_2]^\mathsf{T}$, temos

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{Y} = -\mathbf{y}(0) - \mathbf{G}.$$

EXEMPLO 1 Problema de Mistura Envolvendo Dois Tanques

Na Fig. 142, o tanque T_1 inicialmente contém 100 galões de água pura. O tanque T_2 inicialmente contém 100 galões de água onde são dissolvidas 150 libras de sal. O fluxo de entrada em T_1 é de 2 gal/min a partir de T_2, e de 6 gal/min contendo 6 libras de sal vindo do exterior. O fluxo de entrada em T_2 é de 8 gal/min, a partir de T_1. O fluxo de saída de T_2 é de 2 + 6 = 8 gal/min, conforme mostra a figura. As misturas são revolvidas de modo a se manterem uniformes. Calcule e represente graficamente os conteúdos de sal $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em T_1 e T_2, respectivamente.

Solução. O modelo é obtido na forma de duas equações

$$\text{Taxa temporal da alteração} = \text{Entrada/min} - \text{Saída/min}$$

para os dois tanques (veja a Seção 4.1). Portanto,

$$y_1' = -\frac{8}{100}y_1 + \frac{2}{100}y_2 + 6, \qquad y_2' = \frac{8}{100}y_1 - \frac{8}{100}y_2.$$

As condições iniciais são $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 150$. Disso, vemos que o sistema subsidiário (2) é

$$\begin{aligned} (-0{,}08 - s)Y_1 + \quad 0{,}02Y_2 \quad &= -\frac{6}{s} \\ 0{,}08Y_1 \quad + (-0{,}08 - s)Y_2 &= -150. \end{aligned}$$

Para Y_1 e Y_2 podemos resolver esse sistema algebricamente por eliminação (ou pela regra de Cramer da Seção 7.7) e escrevermos as soluções em termos de frações parciais,

$$Y_1 = \frac{9s + 0{,}48}{s(s + 0{,}12)(s + 0{,}04)} = \frac{100}{s} - \frac{62{,}5}{s + 0{,}12} - \frac{37{,}5}{s + 0{,}04}$$

$$Y_2 = \frac{150s^2 + 12s + 0{,}48}{s(s + 0{,}12)(s + 0{,}04)} = \frac{100}{s} + \frac{125}{s + 0{,}12} - \frac{75}{s + 0{,}04}.$$

Tomando a transformada inversa, chegamos à solução

$$y_1 = 100 - 62{,}5e^{-0{,}12t} - 37{,}5e^{-0{,}04t}$$

$$y_2 = 100 + 125e^{-0{,}12t} - 75e^{-0{,}04t}.$$

A Fig. 142 mostra o interessante gráfico dessas funções. Você poderia explicar fisicamente suas principais características? Por que as funçõe[s] ... o limite 100? Por que y_2 não é monotônica, ao passo que y_1 o é? Por que y_1 a partir de um certo instante fica subitamente maior que y_2? Ex...

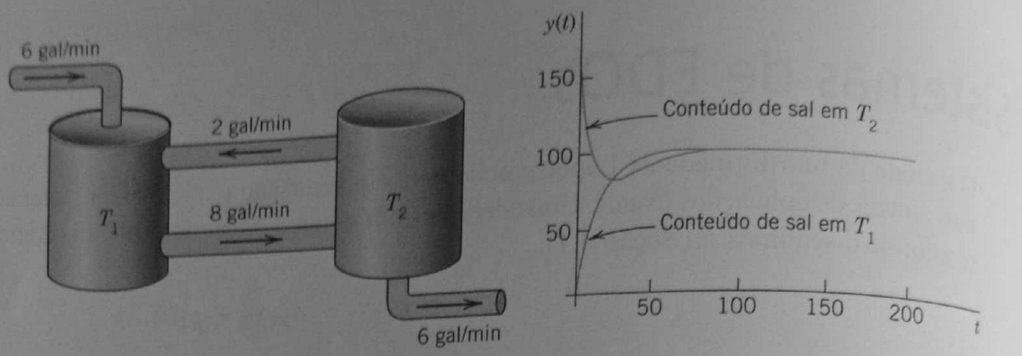

Fig. 142. Problema de mistura do Exemplo 1

Outros sistemas de EDOs de importância prática podem ser similarmente resolvidos pelo método da transfor[mada] de Laplace, com o surgimento automático dos autovalores e autovetores que tivemos que determinar no Cap[ítulo] 4, como vimos no Exemplo 1.

EXEMPLO 2 Circuito Elétrico

Encontre as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ no circuito da Fig. 143, com L e R medidas nas unidades usuais (veja a Seção 2.9), $v(t) = 100$ V se $t \leqq 0{,}5$ e 0 após isso, e $i(0) = 0$, $i'(0) = 0$.

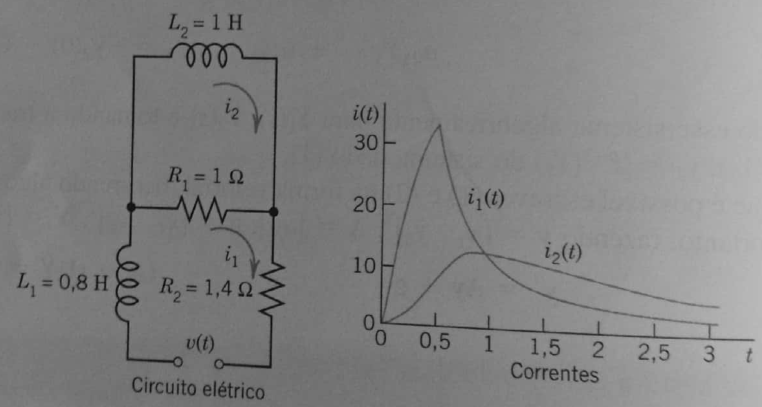

Fig. 143. Circuito elétrico do Exemplo 2

Solução. O modelo desse circuito é obtido a partir da lei da tensão de Kirchhoff, como na Seção 2.9. Para o circuito debaixo, obtemos

$$0{,}8i_1' + 1(i_1 - i_2) + 1{,}4i_1 = 100[1 - u(t - \tfrac{1}{2})]$$

e para o circuito de cima,

$$1 \cdot i_2' + 1(i_2 - i_1) = 0.$$

Dividindo por 0,8 e ordenando os termos, temos, para o circuito debaixo,

$$i_1' + 3i_1 - 1{,}25i_2 = 125[1 - u(t - \tfrac{1}{2})]$$

e para o de cima,

$$i_2' - i_1 + i_2 = 0.$$

Com $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$, obtemos de (1) da Seção 6.2 e do segundo teorema do desvio, a equação subsidiária

$$(s + 3)I_1 - 1{,}25I_2 = 125\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s/2}}{s}\right)$$

$$-I_1 + (s + 1)I_2 = 0.$$

Resolvendo algebricamente para I_1 e I_2, temos

$$I_1 = \frac{125(s+1)}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1-e^{-s/2}),$$

$$I_2 = \frac{125}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1-e^{-s/2}).$$

Os lados direitos sem o fator $1 - e^{-s/2}$ têm as expansões em frações parciais

$$\frac{500}{7s} - \frac{125}{3(s+\frac{1}{2})} - \frac{625}{21(s+\frac{7}{2})}$$

e

$$\frac{500}{7s} - \frac{250}{3(s+\frac{1}{2})} + \frac{250}{21(s+\frac{7}{2})},$$

respectivamente. A transformada inversa disso fornece a solução para $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$,

$$i_1(t) = -\frac{125}{3}e^{-t/2} - \frac{625}{21}e^{-7t/2} + \frac{500}{7}$$

$$i_2(t) = -\frac{250}{3}e^{-t/2} + \frac{250}{21}e^{-7t/2} + \frac{500}{7} \qquad (0 \leqq t \leqq \tfrac{1}{2}).$$

De acordo com o segundo teorema do desvio, a solução para $t > \frac{1}{2}$ é $i_1(t) - i_1(t - \frac{1}{2})$ e $i_2(t) - i_2(t - \frac{1}{2})$, ou seja,

$$i_1(t) = -\frac{125}{3}(1-e^{1/4})e^{-t/2} - \frac{625}{21}(1-e^{7/4})e^{-7t/2}$$

$$i_2(t) = -\frac{250}{3}(1-e^{1/4})e^{-t/2} + \frac{250}{21}(1-e^{7/4})e^{-7t/2} \qquad (t > \tfrac{1}{2}).$$

Você poderia explicar fisicamente por que ambas as correntes acabam indo a zero, e por que $i_1(t)$ possui um ápice destacado, ao passo que $i_2(t)$ apresenta uma direção tangente contínua em $t = \frac{1}{2}$? ■

Os sistemas de EDOs de ordem superior podem ser resolvidos pelo método da transformada de Laplace de um modo similar. Como uma importante aplicação, típica de diversos sistemas mecânicos similares, consideraremos as massas vibrantes e acopladas, presas a molas.

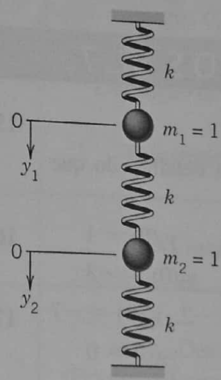

Fig. 144. Exemplo 3

EXEMPLO 3 Modelo de Duas Massas Presas a Molas (Fig. 144)

O sistema mecânico da Fig. 144 consiste em dois corpos de massa 1 presos a três molas de mesma constante elástica k, sendo desprezíveis as massas das molas. Também se supõe que o amortecimento seja praticamente nulo. Então, o modelo para esse sistema físico corresponde ao sistema de EDOs

(3)
$$y_1'' = -ky_1 + k(y_2 - y_1)$$
$$y_2'' = -k(y_2 - y_1) - ky_2.$$

Aqui, y_1 e y_2 são os deslocamentos dos corpos em relação às suas respectivas posições de equilíbrio estático. Essas EDOs decorrem da **segunda lei de Newton**, *Massa × Aceleração = Força*, como na Seção 2.4 que tratava de um único corpo. De novo, consideramos as forças para baixo como positivas e as para cima como negativas. No corpo de cima, $-ky_1$ é a força da mola superior e $k(y_2 - y_1)$ é a força da mola do meio, com $y_2 - y_1$ sendo a alteração líquida no comprimento da mola – pense nisso antes de prosseguir. No corpo debaixo, $-k(y_2 - y_1)$ é a força da mola do meio e $-ky_2$ a força da mola debaixo.

Determinaremos a solução correspondente às condições iniciais $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_1'(0) = \sqrt{3k}$, $y_2'(0) = -\sqrt{3k}$. Façamos $Y_1 = \mathcal{L}(y_1)$ e $Y_2 = \mathcal{L}(y_2)$. Então, de (2) da Seção 6.2 e das condições iniciais, obtemos o sistema subsidiário

$$s^2Y_1 - s - \sqrt{3k} = -kY_1 + k(Y_2 - Y_1)$$
$$s^2Y_2 - s + \sqrt{3k} = -k(Y_2 - Y_1) - kY_2.$$

Esse sistema de equações algébricas lineares com as incógnitas Y_1 e Y_2 pode ser escrito como

$$\begin{aligned}(s^2 + 2k)Y_1 - \quad kY_2 \quad &= s + \sqrt{3k} \\ -kY_1 \quad + (s^2 + 2k)Y_2 &= s - \sqrt{3k}.\end{aligned}$$

O método da eliminação (ou a regra de Cramer da Seção 7.7) fornece a solução, que pode ser expandida em termos de frações pa

$$Y_1 = \frac{(s + \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s - \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{s}{s^2 + k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}$$

$$Y_2 = \frac{(s^2 + 2k)(s - \sqrt{3k}) + k(s + \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{s}{s^2 + k} - \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}.$$

Logo, a solução do nosso problema de valor inicial é (Fig. 145)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y_1) = \cos\sqrt{k}t + \operatorname{sen}\sqrt{3k}t \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y_2) = \cos\sqrt{k}t - \operatorname{sen}\sqrt{3k}t. \end{aligned}$$

Vemos que o movimento de cada massa é harmônico (o sistema não é amortecido!), correspondendo à superposição de uma oscila e uma oscilação "rápida".

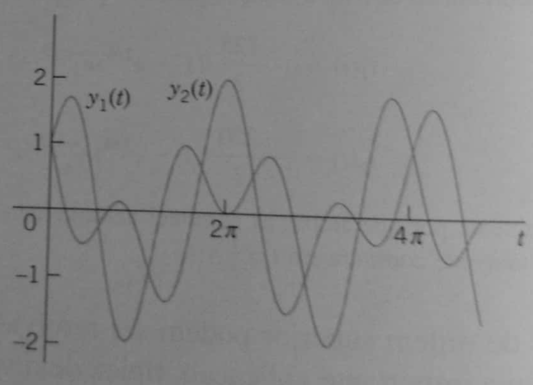

Fig. 145. Soluções do Exemplo 3