

BRUNA ARCIE POLLI

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO UNIDIMENSIONAL DE
EVOLUÇÃO TÉRMICA DE UM RESERVATÓRIO SUBTROPICAL**

CURITIBA
2011

BRUNA ARCIE POLLI

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO UNIDIMENSIONAL DE
EVOLUÇÃO TÉRMICA DE UM RESERVATÓRIO SUBTROPICAL**

Trabalho apresentado à disciplina de Projeto Final de Engenharia Ambiental II do Curso de Engenharia Ambiental do setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção de título de graduação em Engenharia Ambiental.

Orientador: Tobias Bernward Bleninger

CURITIBA
2011

Agradecimentos

Quero agradecer ao Prof. Tobias Bleninger, por ser meu orientador. Por ter me dado a oportunidade de desenvolver este trabalho e pela confiança durante todo o projeto.

Agradeço ao Michael Mannich, pelo tempo me ajudando em dúvidas relativas ao trabalho e no desenvolvimento do modelo.

À Prof^a Cynara Cunha, por ceder os dados do Reservatório do Rio Verde, possibilitando o estudo de caso do modelo.

Aos meus amigos Cleverson, Danieli e Gabriele, pela amizade e apoio durante toda a graduação.

Aos meus pais José e Irene e às minhas irmãs Valéria, Marilise e Josirene, pelo apoio, compreensão e carinho. Aos meus cunhados, Rodrigo e Paulo, pela ajuda sempre que precisei.

Muito obrigada!

Sumário

1	Introdução	9
2	Caracterização dos processos e parâmetros	11
3	Revisão Bibliográfica	14
3.1	Evolução Térmica em Lagos	14
3.2	Balanco de energia em superfícies líquidas	17
3.2.1	Radiação de ondas curtas	18
3.2.2	Radiação de ondas longas	19
3.2.3	Precipitação, Evaporação e Calor Sensível	20
3.3	Difusão Turbulenta	22
3.4	Equação do transporte de calor	28
3.5	Modelos matemáticos	29
3.6	Método das diferenças finitas	33
3.6.1	Método explícito	36
3.6.2	Método implícito	37
3.6.3	Método de Crank-Nicolson	38
4	Descrição do Modelo	40
4.1	Estabilização dos perfis de temperatura	43
5	Discretização do modelo matemático	45
5.1	Discretização da equação do transporte de calor	45
5.2	Discretização das condições de contorno	46
6	Simulações	48
6.1	Velocidade do Vento e Radiação Solar	48
6.1.1	Teste 1	48
6.1.2	Teste 2	51
6.1.3	Teste 3	54
6.1.4	Teste 4	55
6.1.5	Teste 5	60
6.1.6	Teste 6	60
6.1.7	Teste 7	61

6.1.8	Teste 8	63
7	Estudo de Caso	66
7.1	Estudo de Caso: Simulação 1	66
7.2	Estudo de Caso: Simulação 2	71
8	Conclusões	76
9	Referências Bibliográficas	78

Lista de Figuras

1	Parâmetros de interesse do estudo	11
2	Massa específica da água pura como função da temperatura	12
3	Representação da estratificação térmica em um lago	15
4	Perfil instável de temperatura	16
5	Balanco de energia em uma superfície líquida	18
6	Coeficiente de difusão turbulenta em condições neutras	26
7	Condições de contorno do modelo	31
8	Aproximações para primeira derivada de uma função	35
9	Pontos da grade envolvidos no método explícito	37
10	Pontos da grade envolvidos no método implícito	38
11	Pontos da grade envolvidos no método de Crank Nicolson	39
12	Fluxograma de execução do programa	44
13	Esquema de aplicação do Método das Diferenças Finitas explícito no Modelo para alguns pontos	46
14	Perfil de temperatura inicial para os Testes 1, 2, 5 e 6	49
15	Perfil de temperatura inicial para os Testes 3, 4, 7 e 8	49
16	Perfis de Temperatura – Teste 1	51
17	Número de Richardson – Teste 1	52
18	Fluxo de energia na Superfície – Teste 1	52
19	Perfis de Temperatura – Teste 2	53
20	Fluxo de energia na Superfície – Teste 2	53
21	Número de Richardson – Teste 2	54
22	Coeficiente de difusão turbulenta – Teste 2	55
23	Perfis de Temperatura – Teste 3	56
24	Fluxo de energia na Superfície – Teste 3	56
25	Número de Richardson – Teste 3	57
26	Perfis de Temperatura – Teste 4	58
27	Número de Richardson – Teste 4	58
28	Fluxo de energia na Superfície – Teste 4	59
29	Coeficiente de difusão turbulenta – Teste 4	59
30	Perfis de Temperatura – Teste 5	60
31	Número de Richardson – Teste 5	61
32	Perfis de Temperatura – Teste 6	62

33	Número de Richardson – Teste 6	62
34	Perfis de Temperatura – Teste 7	63
35	Número de Richardson – Teste 7	64
36	Perfis de Temperatura – Teste 8	64
37	Número de Richardson – Teste 8	65
38	Dados meteorológicos - Simulação 1	67
39	Estudo de Caso: Simulação 1 - Perfis de temperatura	67
40	Estudo de Caso: Simulação 1 - Coeficiente de Difusão Turbulento	68
41	Estudo de Caso: Simulação 1 - Fluxo de Energia na Superfície	69
42	Estudo de Caso: Simulação 1 - Número de Richardson	69
43	Estudo de Caso: Simulação 1 - Dados medidos e simulados	70
44	Estudo de Caso: Simulação 1 - Dados medidos e simulados	70
45	Dados meteorológicos - Simulação 2	71
46	Estudo de Caso: Simulação 2 - Perfis de temperatura	72
47	Estudo de Caso: Simulação 2 - Coeficiente de Difusão Turbulento	72
48	Estudo de Caso: Simulação 2 - Fluxo de Energia na Superfície	73
49	Estudo de Caso: Simulação 2 - Número de Richardson	74
50	Estudo de Caso: Simulação 2 - Dados medidos e simulados	74
51	Estudo de Caso: Simulação 2 - Dados medidos e simulados	75

Resumo

Neste trabalho é apresentado um modelo unidimensional de evolução térmica de reservatórios, que foi baseado nos estudos de Antonopoulos e Gianniou (2003) e Henderson-Sellers (1985). São considerados os fluxos de energia na superfície do reservatório, estimados por meio da temperatura de equilíbrio e, como fonte de energia, a radiação solar. A parametrização da difusão turbulenta utilizada tem a vantagem de não necessitar de calibração. Os perfis de temperatura são estimados por meio da solução da equação unidimensional do transporte de calor, a qual é resolvida pelo método de diferenças finitas explícito. São apresentados testes para a resposta do modelo à radiação solar e vento, além de um estudo de caso com dados do Reservatório do Rio Verde.

Palavras-Chave: temperatura da água, estratificação térmica, modelo, simulação.

1 Introdução

A estratificação da coluna d'água de um lago ou reservatório é o resultado das interações entre o calor recebido pela água e ação do vento na superfície.

Quando um lago está estratificado termicamente apresenta, em geral, três camadas: o epilímnio – camada superior, com temperaturas elevadas (e, portanto, menor densidade da massa d'água), o hipolímnio – camada inferior, com temperaturas mais baixas e o metalímnio que é a região de transição entre as duas camadas anteriormente mencionadas. Devido a essa diferença de densidade a mistura entre as camadas de água é reduzida significativamente e o calor não é distribuído de maneira uniforme. À medida que o corpo d'água perde calor para o ambiente e o vento age na superfície, ocorre um processo de instabilidade térmica devido à densidade da água aumentar nas camadas mais próximas à superfície. Esse tipo de interação pode levar à desestratificação do corpo d'água.

O conhecimento do processo de evolução térmica de um lago é de fundamental importância para entender os seus processos físicos, químicos e biológicos. A temperatura é um importante parâmetro neste aspecto – um exemplo é a concentração de oxigênio dissolvido na água – quando o lago está estratificado, a região do hipolímnio pode ficar anóxica devido a redução da mistura das camadas de água (causando a diminuição da aeração no fundo do corpo d'água) e, com isso, promover a produção de metano (CH_4) que é liberado na atmosfera (ESTEVES, 1988). Babajimopoulos e Papadopoulos (1986) enfatizam a importância da estrutura térmica para propriedades químicas, biológicas e de oxigênio dissolvido da água.

O lago interage com o ambiente devido ao vento e por meio de trocas de calor e radiativas, nos quais os processos mais significativos são a absorção de radiação de ondas curtas e longas, evaporação, condução e emissão pela superfície da água – que são fortemente influenciadas por condições meteorológicas. No fundo e nas margens do lago também ocorre transferência de calor mas, em muitos casos, é desprezada por ser pequena em relação às trocas de energia que ocorrem na superfície.

O aquecimento da coluna d'água ocorre pela absorção da radiação solar que tem um papel de grande importância na estrutura térmica, estratificação da massa de água e padrões de circulação em lagos (WETZEL, 1983). Para isso, a radiação solar incidente no lago é considerada uma fonte de calor que, juntamente com o processo de difusão turbulenta gerada pelo vento, é responsável pela estratificação/desestratificação da massa d'água.

A temperatura do corpo d'água afeta diretamente a qualidade desse recurso. A possibilidade de avaliar os eventos de estratificação/desestratificação, utilizando um modelo de evolução térmica, permite o estudo do comportamento do reservatório para diferentes condições meteorológicas e a gestão do reservatório para minimizar os efeitos negativos que tais eventos podem proporcionar.

O objetivo deste trabalho é estudar a evolução térmica de lagos, utilizando um método numérico para a solução da equação da difusão do calor não permanente. Considera-se o aquecimento da coluna d'água pela radiação solar incidente, de maneira não permanente.

Foram realizados dois tipos de testes – no primeiro foi avaliada a resposta do modelo, com foco na radiação solar e no vento e o segundo conjunto de testes foi um estudo de caso com dados do Reservatório do Rio Verde.

O desenvolvimento do modelo de estrutura térmica proposto neste estudo permitirá, no futuro, ampliar a gama de aplicações – com o acoplamento de modelos de transporte de massa, decaimento e reações em reservatórios, para estudos como o mencionado anteriormente de transformação e transporte de metano.

2 Caracterização dos processos e parâmetros

A Figura 1 apresenta os parâmetros de interesse neste estudo.

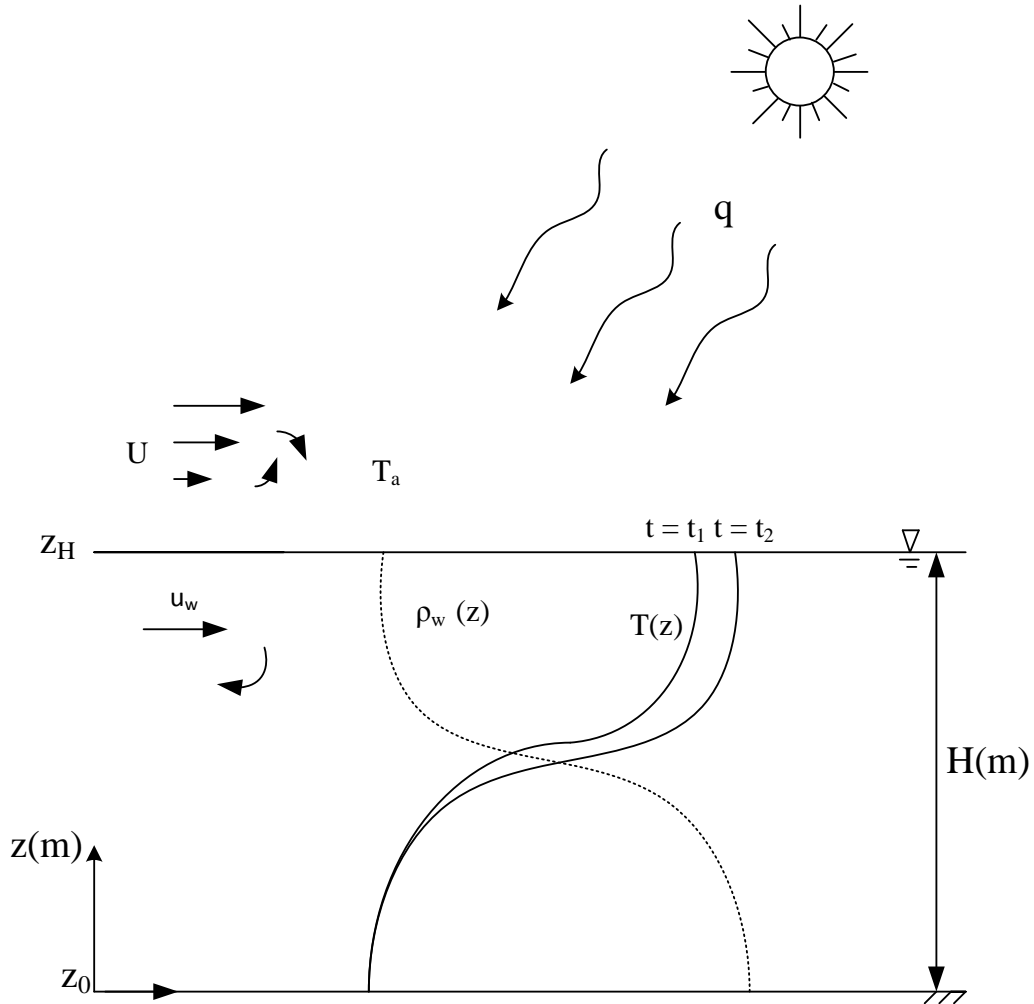


Figura 1: Parâmetros de interesse do estudo

Nesta figura, z é a elevação (m) - medida do fundo para cima, T_a é a temperatura do ar ($^{\circ}\text{C}$), U é a velocidade do vento (ms^{-1}), u_w é a velocidade horizontal da água (ms^{-1}), t é o tempo (s), q é a fonte de calor devido à radiação solar ($\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$), H é a profundidade média do lago (m), ρ_w é a massa específica da água, variando de acordo com a profundidade (kgm^{-3}) e $T(z)$ é a temperatura da água em função da profundidade z ($^{\circ}\text{C}$);

Na Figura 1 está caracterizado o processo de estratificação térmica em um reservatório, devido à diferença de temperatura entre as camadas de água e, portanto, diferença de massa específica da água. A fonte de calor para o aquecimento da coluna d'água é representada pela incidência da radiação solar na superfície do lago. O vento, outro forçante do sistema, é responsável pelo cisalhamento agindo na superfície e mistura da água, caracterizado pelo processo de difusão turbulenta do calor.

Para o desenvolvimento do estudo é necessário destacar uma importante característica da água pura em relação à sua massa específica: esta última máxima a uma temperatura de 3,9817°C (999,97 kg m⁻³) – valor calculado pela equação da UNESCO (FOFONOFF, MILLARD, 1983) e que será apresentada na descrição do modelo. A variação da massa específica da água não ocorre de maneira proporcional com mudanças na temperatura: a massa específica diminui mais rapidamente em altas temperaturas (HORNE, GOLDMAN, 1994). A Figura 2 ilustra a massa específica da água pura como função da temperatura.

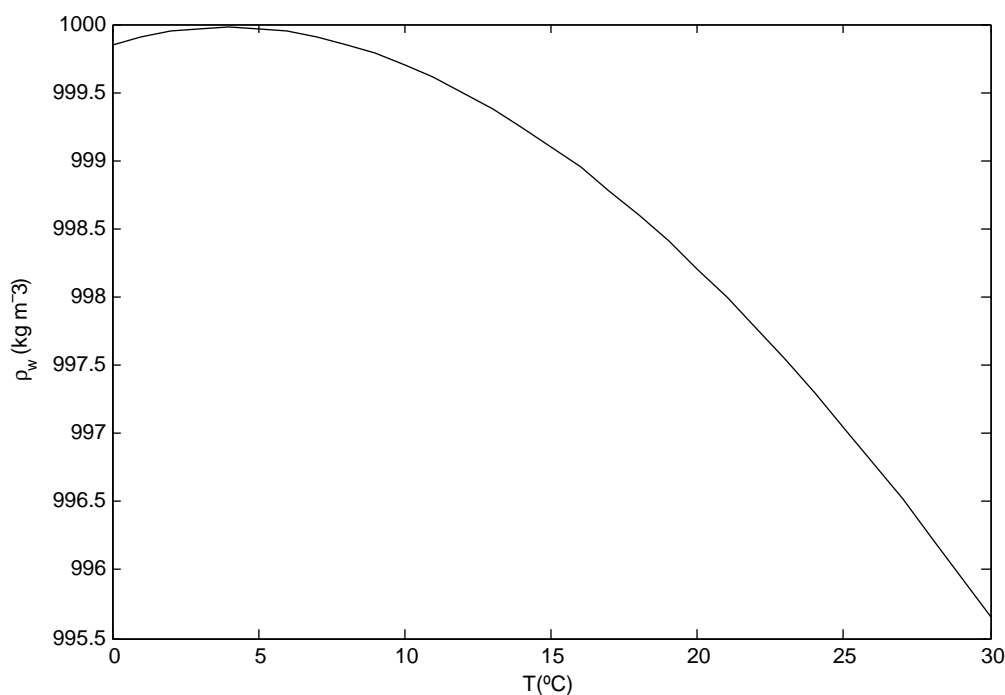


Figura 2: Massa específica da água pura como função da temperatura
Fonte: HORNE e GOLDMAN (1994)

A diferença de massa específica da água na vertical pode ocorrer não somente devido à tem-

peratura, mas também pela salinidade (WETZEL, 1983) ou outras substâncias dissolvidas. Os efeitos da salinidade predominam em relação aos efeitos da temperatura em estuários e oceanos (HORNE, GOLDMAN, 1994). Neste estudo, o foco no processo de estratificação térmica em lagos será dado à temperatura.

3 Revisão Bibliográfica

3.1 Evolução Térmica em Lagos

A estratificação da coluna d'água é considerada somente pelo efeito da temperatura sobre a densidade da água. O lago absorve a radiação solar, na superfície, e essa energia se propaga na água, de molécula a molécula, por um processo lento, conhecido como condução. O outro processo de transporte, de escala maior, é devido à turbulência e advecção na água, criada pela ação do vento que incide na superfície (ESTEVES, 1988).

Quando um lago está estratificado, as distintas camadas de água reduzem significativamente a mistura, devido a diferenças de temperatura que geram camadas com densidades diferentes. Essa é uma barreira física que reduz a mistura, controla a difusão do calor e substâncias dissolvidas. De maneira geral, o lago apresenta três camadas com diferentes gradientes de temperatura (ESTEVES, 1988), ilustradas na Figura 3:

- Epilímnio: camada superior bem misturada, caracterizada por temperatura uniforme e quente. Esta camada pode variar de profundidade, dependendo das interações entre o vento e a radiação solar (GOLDMAN, HORNE, 1994);
- Hipolímnio: camada inferior, mais fria e densa;
- Metalímnio: região de transição entre o epilímnio e o hipolímnio, com uma inversão do gradiente de temperatura (ESTEVES, 1988).

A essa inversão do gradiente de temperatura dá-se o nome de termoclina, que separa a camada superior, quase homogênea, da inferior (SUNDARAM, REHM, 1971).

O regime térmico em lagos temperados é principalmente o resultado da interação entre a transferência de calor na superfície do lago e a força de gravidade, que age pela diferença de densidade. Dependendo da estação do ano, a transferência de calor tende a aumentar ou diminuir a temperatura devido a forçantes meteorológicas: radiação solar incidente, temperatura do ar, umidade relativa, velocidade do vento (CHAPRA, 1997).

Durante o início da primavera, muitos lagos apresentam temperatura constante em toda a profundidade. Com a chegada da estação quente, o lago começa a se aquecer, principalmente devido

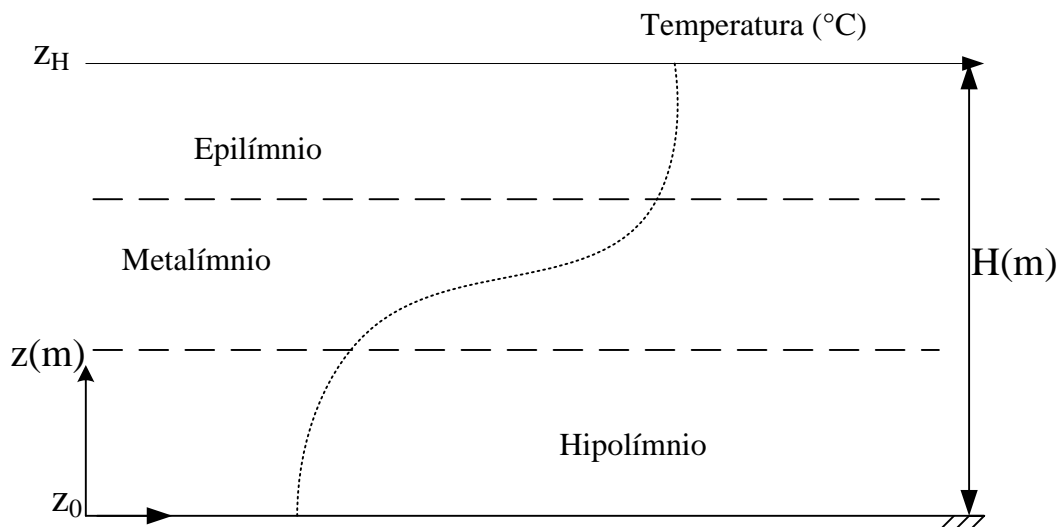


Figura 3: Representação da estratificação térmica em um lago
 Fonte: ESTEVES (1988)

à radiação solar recebida na superfície. Como a taxa de aquecimento continua a crescer, a temperatura da superfície do corpo d'água começa a aumentar. Nesta fase, começa a estratificação térmica, com uma camada superior bem misturada, o máximo gradiente de temperatura – a termoclina e a parte inferior do lago com temperatura mais baixa. Com o início da estação fria, as camadas superiores começam a perder calor – a temperatura diminui - caracterizando um episódio de instabilidade térmica (figura 4) que é compensada pela mistura convectiva apoiada pela ação do vento. Com isso, o lago passa novamente a ter um perfil homotérmico de temperatura (SUNDARAM, REHM, 1971). Essa é uma característica de lagos monomíticos (que se misturam uma vez ao ano). Os lagos são classificados de acordo com o número de vezes que se misturam: em lagos dimíticos ocorrem duas misturas, polimíticos ocorrem várias misturas e os meromíticos, que raramente se misturam até o fundo.

A estratificação térmica pode ser modificada pelas relações entre rios afluentes ao lago, principalmente se o volume afluente é grande em relação ao volume do epilímnio, podendo causar o resfriamento do corpo d'água e aumentar a turbulência (WETZEL, 1983). Neste trabalho, as mudanças no regime térmico do lago devido a contribuições de rios afluentes serão desconsideradas – considera-se que o volume afluente é pequeno em relação ao volume do reservatório e, portanto, a variação de temperatura devido aos afluentes é importante na entrada do reservatório e, no restante do reservatório essa parcela não age de maneira significativa.

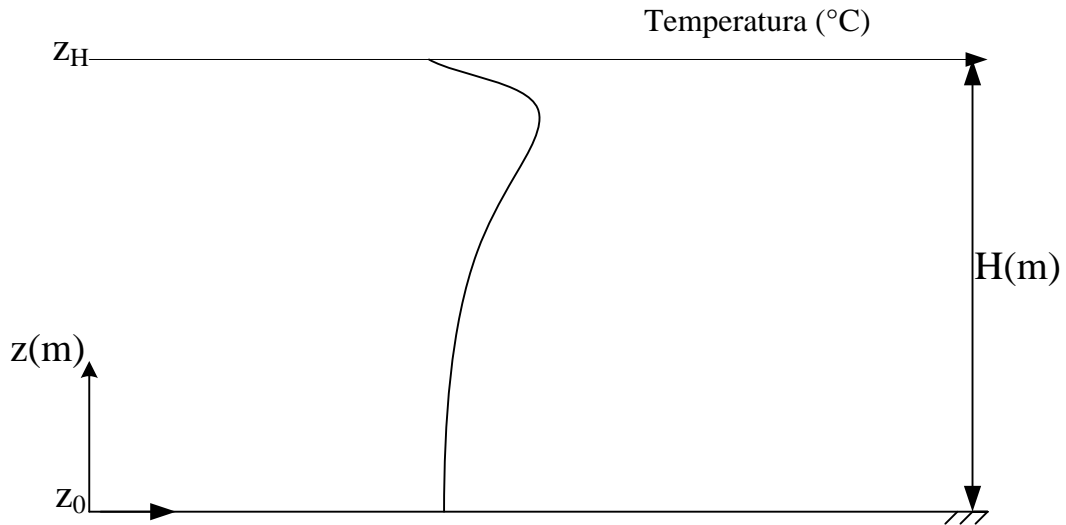


Figura 4: Perfil instável de temperatura
Fonte: DAKE e HARLEMAN (1969)

A intensidade de estabilidade local de estratificação de densidade pode ser quantificada pela frequência de Brunt-Väisälä, N , definida como (WÜEST, LORKE, 2009):

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_{w0}} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (1)$$

na qual, z é a profundidade (m), g é a aceleração da gravidade (ms^{-2}), ρ_{w0} é a densidade da água (a uma temperatura T_0) (kgm^{-3}) e N é a frequência de Brunt Väisälä (s^{-1}). Caso $\partial \rho / \partial z < 0$ a estratificação é dita estável. Se uma parcela de água se mover (subir, por exemplo), tenderá a ficar mais pesada que as parcelas vizinhas e desce. O mesmo é válido para uma parcela de água que descer – será mais leve e voltará a posição original. Se $\partial \rho / \partial z > 0$, a estratificação é instável - que normalmente não é sustentada por longos períodos, pois o fluido tende a se rearranjar para uma situação mais estável (GOBBI, 2005).

O número de Richardson quantifica a estabilidade térmica, o qual é uma relação entre a taxa de supressão ou geração de turbulência devido ao empuxo e a geração de turbulência devido ao vento:

$$Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u_w}{\partial z}\right)^2} \quad (2)$$

na qual: u_w é a componente horizontal da velocidade da água (ms^{-1}). O número de Richardson é positivo para estratificação estável (SUNDARAM, REHM, 1971) - quando $Ri < 0,25$ o perfil se torna instável e ocorre mistura turbulenta (WETZEL, 1983).

3.2 Balanço de energia em superfícies líquidas

Os processos de troca de calor ocorrem principalmente na interface água-ar. O balanço de energia térmica na superfície do reservatório, em unidades de calor por unidade de área (EDINGER, DUTTWEILER, GEYER, 1968), é (HENDERSON-SELLERS, 1986):

$$H_n = H_s(1 - a_s) + H_{ri}(1 - a_L) - H_{ro} - H_L \quad (3)$$

na qual: H_n é a energia líquida disponível para a água, H_s é a radiação incidente de ondas curtas, H_{ri} é a radiação de ondas longas, a_s e a_L são o albedo para ondas curtas e longas respectivamente, H_{ro} é a radiação de onda longa emitida pela água e H_L representa a parcela não relacionada à radiação, contabilizada devido à precipitação (H_p), calor sensível (H_c) e evaporação (H_e). A Figura (5) ilustra o balanço de energia em uma superfície líquida.

Da equação 3, os termos:

$$H_r = H_s(1 - a_s) + H_{ri}(1 - a_L) \quad (4)$$

representam a radiação absorvida (H_r , na equação 4). Essa radiação é independente da temperatura da superfície da água e os termos podem ser calculados a partir de observações meteorológicas ou então, medidos. Os termos remanescentes da equação (3) dependem da temperatura da superfície da água, da pressão de vapor da água, da temperatura do ar e vento (EDINGER, DUTTWEILER, GEYER, 1968).

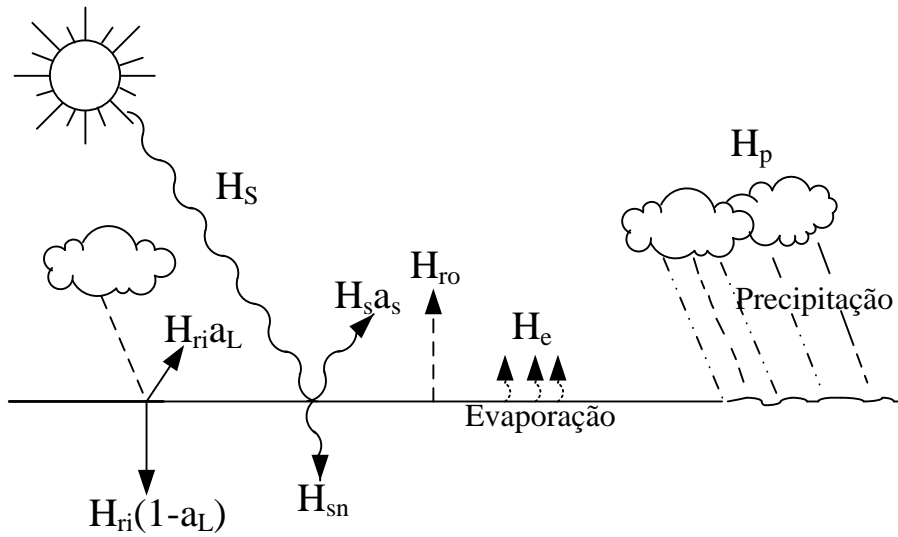


Figura 5: Balanço de energia em uma superfície líquida
Fonte: WÜEST e IMBODEN (1995)

3.2.1 Radiação de ondas curtas

A radiação solar líquida de ondas curtas atingindo a interface água-ar pode ser descrita como a radiação que chega ao topo da atmosfera menos as perdas devido ao espalhamento e dispersão na atmosfera, além da reflexão na superfície da água (ORLOB, SELNA, 1970). Como descrito anteriormente, este tipo de radiação pode ser medido ou estimado.

Orlob e Selna (1970) propõem a seguinte relação para a estimativa de radiação de ondas curtas na interface água-ar:

$$H_{sn} = H_0 \left[\frac{a'' + 0,5(1 - a' - d)}{1 - 0,5R_g(1 - a' + d)} \right] C_s(1 - R_s) \quad (5)$$

na qual: H_0 é o fluxo de radiação no topo da atmosfera, a'' é a média de transmissão atmosférica depois do espalhamento e absorção, a' é a média de transmissão atmosférica depois do espalhamento, d atenuação da poeira total, C_s é um fator de correção para nebulosidade (função da porcentagem de cobertura de nuvens) e R_g é a refletividade do solo nas proximidades do lago à radiação de onda curta.

Gianniou e Antonopoulos (2007), por outro lado, usam uma estimativa mais simples do que

a anterior relacionada com a quantidade de horas de incidência solar diária, conhecida como equação de Angström-Prescott:

$$H_s = \left(a + b \frac{n}{N} \right) H_0 \quad (6)$$

na qual: H_s é a radiação solar incidente, n/N é a relação entre insolação diária real e teórica, H_0 é a radiação incidente no topo da atmosfera e a e b são constantes dependentes da latitude. A insolação real (n) é estimada com base em dados de insolação diária, enquanto N (insolação diária teórica) e H_0 são calculados como função da latitude e dia do ano. A radiação de ondas curtas líquida é estimada subtraindo-se a radiação que é refletida pela superfície da água:

$$H_{sn} = H_s(1 - a_s) \quad (7)$$

na qual, H_{sn} é a radiação líquida de ondas curtas e a_s é o albedo, cujo valor médio é 0,07 (GIAN- NIOU, ANTONOPOULOS, 2007).

3.2.2 Radiação de ondas longas

A radiação de ondas longas origina-se da emissão de várias camadas da atmosfera a partir de moléculas, como CO_2 e vapor de água (HENDERSON-SELLERS, 1986). A emissão pode ser estimada por:

$$H_{ri} = \varepsilon_a \sigma T_a^4 \quad (8)$$

na qual: ε_a é a emissividade atmosférica, σ é a constante de Stefan-Boltzmann ($5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$) e T_a é a temperatura do ar na camada mais baixa da atmosfera (K). Duarte *et al.* (2006) ressalta que a equação (8) é uma analogia com a lei de Stefan Boltzmann para a radiação emitida por um corpo cinza com temperatura uniforme, já que a temperatura na atmosfera não é uniforme. A emissividade da atmosfera pode ser determinada como função da cobertura de nuvens (C) e da pressão de vapor do ar – e_a (kPa), como (HENDERSON-SELLERS, 1986):

$$\varepsilon_a = 0,84 - (0,1 - 9,973 \cdot 10^{-6} e_a)(1 - C) + 3,491 \cdot 10^{-5} e_a, (1 - C) \geq 0,4 \quad (9)$$

$$\varepsilon_a = 0,87 - (0,175 - 29,92 \cdot 10^{-6} e_a)(1 - C) + 2,693 \cdot 10^{-5} e_a, (1 - C) < 0,4 \quad (10)$$

Com isso, a radiação líquida de onda longa é:

$$H_{rin} = H_{ri}(1 - a_L) \quad (11)$$

na qual H_{rin} é a radiação líquida de ondas longas. O albedo a_L é de aproximadamente 0,03 (HENDERSON-SELLERS, 1986).

O corpo d'água também perde energia devido à emissão de ondas longas (ORLOB, SELNA, 1970). A Lei de Stefan- Boltzmann se aplica a esse caso. No entanto, na equação (8), a emissividade ($\varepsilon=0,97$) e a temperatura referem-se à superfície da água (HENDERSON-SELLERS, 1986).

$$H_{ro} = \varepsilon_w \sigma T_s^4 \quad (12)$$

3.2.3 Precipitação, Evaporação e Calor Sensível

A precipitação, evaporação e calor sensível representam parcela do balanço de energia que não está relacionada à radiação. Consideram-se perdas por evaporação, ganhos devido à precipitação e transferência de calor sensível. Uma vez que a precipitação não envolve mudança de estado, as trocas de energia a ela associadas são muito menores do que as associadas à evaporação e serão desprezadas. Então, o termo H_L (equação 3) pode ser escrito como (HENDERSON-SELLERS, 1986):

$$H_L = H_c + H_e \quad (13)$$

na qual: H_c relaciona-se a transferência de calor sensível e H_e refere-se a evaporação.

O fluxo de energia devido à evaporação pode ser estimado como (ORLOB, SELNA, 1970):

$$H_e = \rho L_w E \quad (14)$$

na qual: ρ é a massa específica da água (kg. m^{-3}), L_w é o calor latente de vaporização (J.kg^{-1}) e E é a taxa de evaporação (m.s^{-1}).

A taxa de evaporação é uma função da velocidade do vento e da diferença da pressão de vapor. Uma relação empírica é (ORLOB, SELNA, 1970; GIANNIOU ANTONOPOULOS, 2007):

$$E = N_E U_2 (e_{sat} - e_{a2}) \quad (15)$$

na qual: N_E é uma constante empírica, U_2 é a velocidade do vento a 2 m de altura (ms^{-1}), e_{sat} é a pressão de vapor de saturação do ar à temperatura da superfície da água (Pa) e e_{a2} é a pressão de vapor da água a 2 m de altura (Pa).

O calor latente de vaporização (Jkg^{-1}) pode ser determinado pela equação (HENDERSON-SELLERS, 1984):

$$L_w = 1,91846.10^6 \left[\frac{T_s + 273}{T_s + 329,09} \right]^2 \quad (16)$$

na qual, T_s é a temperatura da superfície da água ($^{\circ}\text{C}$).

O fluxo de calor sensível é calculado pela relação de Bowen (HOSTETLER, BARTLEIN, 1990):

$$H_c = RH_e \quad (17)$$

em que R é a relação de Bowen, que pode ser determinada por:

$$R = \gamma \frac{T_s - T_a}{e_{sat} - e_a} \quad (18)$$

na qual: γ é a constante psicrométrica ($\text{kPa}^{\circ}\text{C}^{-1}$), T_s é a temperatura da superfície ($^{\circ}\text{C}$), T_a é a temperatura do ar ($^{\circ}\text{C}$), e_{sat} é a pressão de vapor de saturação na superfície do lago (kPa) e e_a é a pressão de vapor do ar (kPa). A constante psicométrica pode ser calculada por (BRUTSAERT, 1982 *apud* CANCELLI, 2006):

$$\gamma = \frac{c_p p}{0,622 L_w} \quad (19)$$

na qual p é a pressão atmosférica local (Pa).

A taxa de calor sensível depende da diferença ($T_s - T_a$). Quando $T_s < T_a$ calor é conduzido do ar para o lago. Por outro lado, se $T_s > T_a$, o lago perde energia para a atmosfera. Durante a primavera o lago recebe energia como calor sensível, pois a temperatura da água é menor do que a temperatura do ar. No outono e inverno o lago perde calor para a atmosfera, pois a temperatura da água é maior que a temperatura da atmosfera (GIANNIOU ANTONOPOULOS, 2007).

3.3 Difusão Turbulenta

De acordo com Bedford e Babajimopoulos (1977), a determinação da difusividade turbulenta é um problema complicado, já que não se trata de uma propriedade termodinâmica do fluido. Uma possível abordagem é a inclusão de relações empíricas que relacionem o coeficiente de difusão turbulenta com variáveis como: gradiente vertical de temperatura, densidade, velocidade de atrito e profundidade.

Sundaram e Rehm (1971) salientam o uso, em alguns estudos, do coeficiente de difusão turbulenta constante em toda a profundidade do lago. No entanto, essa abordagem não prevê a termoclina separando a camada superior, bem misturada, da inferior, mais fria. Uma alternativa é considerar um modelo de duas camadas, no qual a parte superior e inferior do lago são descritas por diferentes, mas constantes, coeficientes de difusão turbulenta.

Sundaram e Rehm (1971) propõem para a determinação da difusividade turbulenta (em condição de estratificação térmica estável):

$$K_H = K_{H_0} f \quad (20)$$

na qual: K_H é o coeficiente de difusão turbulenta (m^2s^{-1}), K_{H_0} é o coeficiente de difusão turbulenta em condição de estratificação neutra (m^2s^{-1}) e f é uma função com um parâmetro de estabilidade adequado caracterizando a estratificação.

Uma das formas mais comuns para o parâmetro de estabilidade é o número de Richardson, definido na equação (2). Aplicando a regra da cadeia na equação (1), obtém-se:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_{w0}} \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (21)$$

na qual:

$$\alpha_v = \frac{1}{\rho_{w0}} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (22)$$

é o coeficiente de expansão volumétrico para a água, que pode ser calculado para $T \leq 11^\circ\text{C}$ como (ANTONOPOULOS, GIANNIOU, 2003):

$$\alpha_v = 1,43 \times 10^{-5} T(z) - 0,54 \times 10^{-4} \quad (23)$$

e, para $T > 11^\circ\text{C}$:

$$\alpha_v = 1,41 \times 10^{-5} T(z) - 0,209 \times 10^{-4} \quad (24)$$

nas quais: $T(z)$ é dada em $^\circ\text{C}$ e α_v em $^\circ\text{C}^{-1}$.

Com as considerações presentes nas equações (21) e (22), o número de Richardson (equação 2) pode ser explicitado como:

$$Ri = -\alpha_v g \frac{\frac{\partial T}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u_w}{\partial z}\right)^2} \quad (25)$$

A equação (25) representa a relação entre taxa de produção ou supressão da turbulência pelo empuxo e a taxa de geração de turbulência (SUNDARAM, REHM, 1971).

Utilizando a lei da parede (McCORMICK, SCAVIA, 1981):

$$\frac{\partial u_w}{\partial z} = \frac{w^*}{\kappa(z_H - z)} \quad (26)$$

na qual $w^* = (\tau_s / \rho_w)^{1/2}$ é a velocidade de atrito, τ_s é a tensão induzida pelo vento, ρ_w é a densidade da água, κ é a constante de Von Karman ($\kappa \approx 0,4$) e z_H é a elevação da superfície (m), o número de Richardson pode ser representado por:

$$Ri = -\alpha_v g (z_H - z)^2 \kappa^2 \frac{\frac{\partial T}{\partial z}}{w^{*2}} \quad (27)$$

Henderson-Sellers (1976) sugere que a parametrização da função $f(Ri)$ (equação 20) satisfaça: se $Ri=0$,

$$f(Ri) = 1 \quad (28)$$

a estratificação é neutra na equação (20). Se $Ri \rightarrow \infty$,

$$f(Ri) \rightarrow 0 \quad (29)$$

a estratificação é estável e inibe o processo de difusão.

Uma forma da função f que satisfaz as equações (28) e (29):

$$f(Ri) = (1 + \sigma Ri)^{-n} \quad (30)$$

na qual σ e n são constantes. Henderson-Sellers (1984) mostra que os melhores parâmetros são $\sigma=37$ e $n=1$. Henderson-Sellers (1985) usa, ainda, a equação (30) com o parâmetro Ri^2 . Antonopoulos e Gianniou (2003) calcularam $\sigma=0,007$ e $n=0,62$ para uma simulação.

Bedford e Babajimopoulos (1977) estudaram a difusividade turbulenta para os modelos tipo 1 (modelos que consideram a variação da área com profundidade) e 2 (modelos que não consideram a variação da área com a profundidade). A escolha da formulação da área variável ou constante afeta a magnitude da difusão turbulenta. A relação encontrada foi de K_1/K_2 (os índices 1 e 2 referem-se aos modelos tipo 1 e 2, respectivamente) de aproximadamente 0,62, nas quais as parametrizações são realizadas com base no valor de difusão na superfície.

É importante notar que a forma de determinar a difusividade turbulenta descrita acima devido à turbulência gerada pelo vento não é válida para regiões profundas de um lago, tendo em vista que as formas de geração de turbulência nessas duas regiões são diferentes, em uma condição de estratificação térmica. A região abaixo da termoclina é pouco influenciada por mudanças nas condições da superfície (SUNDARAM, REHM, 1971).

Para o hipolímnio, Sundaram e Rehm (1971) descrevem um método proposto por Mc Ewen, que demonstra que a difusividade nessa região é pequena e quase invariante com a profundidade. Um procedimento bastante utilizado é considerar a difusividade turbulenta constante no hipolímnio e igual ao valor calculado na termoclina, que é mínimo (McCORMICK, SCAVIA, 1981; SUNDARAM, REHM, 1971; BABAJIMOPOULOS, PAPADOPOULOS, 1986).

A difusividade turbulenta em condições neutras (equação 20) também deve ser estimada. Sundaram e Rehm (1973) propõem a relação:

$$K_{H_0} = cw^* \quad (31)$$

na qual c é uma constante. Sundaram e Rehm (1973) estimaram $c=0,0282$.

Henderson-Sellers (1976) compara algumas relações para determinar a difusividade turbulenta em condições neutras. Dentre as formulações estudadas, a melhor representação foi obtida de:

$$K_{H_0} = \frac{w^{*2}}{P_0 \left| \frac{\partial u_w}{\partial z} \right|} \quad (32)$$

na qual P_0 é o valor neutro do número de Prandtl turbulento. Henderson-Sellers (1985) propõe uma reformulação para a difusão turbulenta na equação (32) para um perfil de velocidade da equação (26). A velocidade de atrito pode ser calculada como (HENDERSON-SELLERS, 1985):

$$w^* = w_s^* \exp(-k^*(z_H - z)) \quad (33)$$

na qual w_s^* é a velocidade de atrito do vento na superfície e k^* é uma função da latitude e da velocidade do vento. A velocidade de atrito na superfície pode ser calculada como (HENDERSON-SELLERS, 1985):

$$w_s^{*2} = \frac{\rho_a}{\rho_w} c_D U^2 \quad (34)$$

na qual c_D é o coeficiente de arrasto. Para k^* , uma expressão válida para diferentes latitudes é (HENDERSON-SELLERS, 1985):

$$k^* = 6,6 \sqrt{\sin \phi} U^{-1,84} \quad (35)$$

na qual ϕ é a latitude. Utilizando as equações (26), (33), e (35) na equação (32) obtém-se para a difusividade turbulenta em condições neutras (HENDERSON-SELLERS, 1985):

$$K_{H_0} = \frac{\kappa w_s^* (z_H - z)}{P_0} \exp(-k^* (z_H - z)) \quad (36)$$

na qual, o perfil de velocidades em condições neutras, considerando w^* na equação (33) resultou em (HENDERSON-SELLERS, 1985):

$$\frac{\partial u_w}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial u_w}{\partial z} \right)_0 = -\frac{w_s^*}{\kappa(z_H - z)} \exp(-k^* (z_H - z)). \quad (37)$$

A equação (36) é estritamente válida apenas na região onde há cisalhamento constante. No entanto, de acordo com Henderson-Sellers (1985) pode ser aplicada a toda a camada e em uma ampla gama de latitudes. A Figura 6 ilustra a forma do coeficiente de difusão turbulenta neutro para a equação (36) para algumas velocidades de vento, na qual observa-se que o valor máximo de difusão encontra-se abaixo da superfície e que a profundidade na qual o máximo ocorre aumenta com o aumento da velocidade do vento.

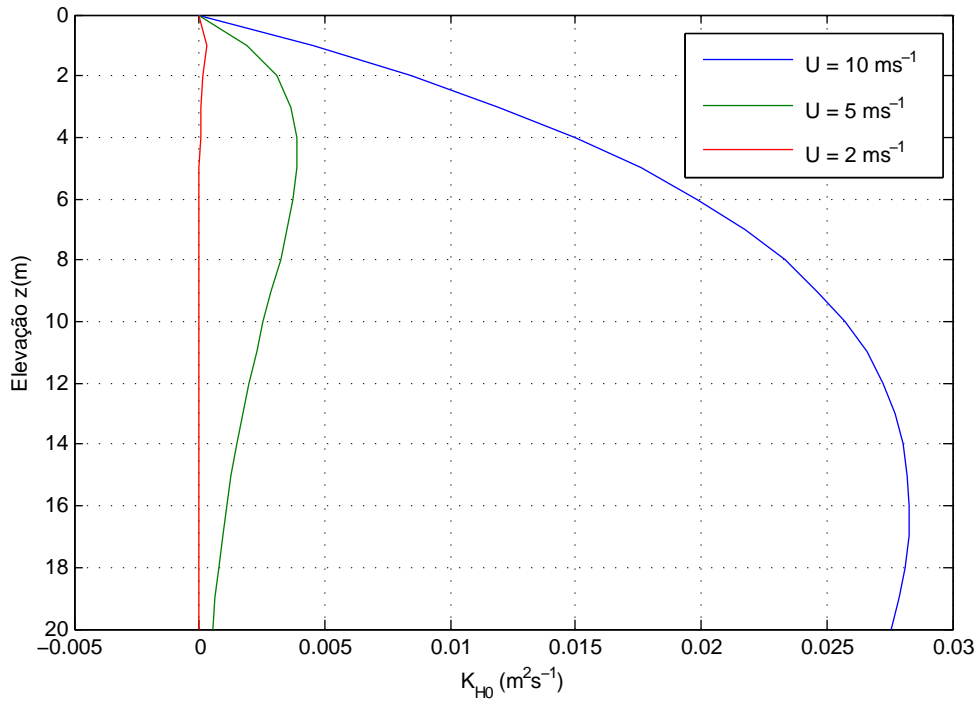


Figura 6: Coeficiente de difusão turbulenta em condições neutras

O perfil de velocidades, no caso não neutro, é proposto como (HENDERSON-SELLERS,

1985):

$$\left(\frac{\partial u_w}{\partial z}\right)_N = \left(\frac{\partial u_w}{\partial z}\right)_0 \frac{1}{g(Ri)} \quad (38)$$

na qual o subscrito N indica condição não neutra e $g(Ri)$ é uma função do número de Richardson, dada por:

$$g(Ri) = (1 + 10Ri)^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

Henderson-Sellers (1985) propõe para a função $g(Ri)$, também: $g(Ri) = (1 + 0,74Ri)^{-1}$. Comparando a equação (38) com a equação (2), obtém-se:

$$Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u_w}{\partial z}\right)_0^2 g^2(Ri)} \quad (40)$$

Por simplicidade, fazendo na equação (40) $X = N^2 / (\partial u / \partial z)_0^2$ e utilizando a forma de $g(Ri)$ dada por (39), tem-se:

$$Ri = X(1 + 10Ri)^{-1} \quad (41)$$

que é uma equação do segundo grau, cuja solução é (HENDERSON-SELLERS, 1985):

$$Ri = \frac{-1 + \left[\frac{1 + 40N^2 \kappa^2 (z_H - z)^2}{w_s^{*2} \exp(-2k^*(z_H - z))} \right]^{\frac{1}{2}}}{20} \quad (42)$$

e, para o coeficiente de difusão turbulenta não neutro, da equação (20) (HENDERSON-SELLERS, 1985):

$$K_H = \frac{\kappa w_s^*(z_H - z)}{P_0} \exp(-k^*(z_H - z)) \frac{1}{1 + 37Ri^2} \quad (43)$$

3.4 Equação do transporte de calor

A equação completa para transferência de calor (transporte advectivo-difusivo) é (HENDERSON-SELLERS, 1976):

$$A(z) \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right] + A(z) \left[u_w \frac{\partial T}{\partial x} + v_w \frac{\partial T}{\partial y} + w_w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = A(z)(\alpha + K_H) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + A(z) \frac{1}{\rho_w c_p} Q \quad (44)$$

na qual: $A(z)$ é a área (m^2) de seção horizontal na profundidade z (m), K_H é o coeficiente de difusão turbulenta para calor ($m^2 s^{-1}$), α é a difusividade molecular ($m^2 s^{-1}$), u_w , v_w , e w_w são as componentes da velocidade (ms^{-1}) (considerando o sistema de coordenadas da Figura 1), Q é uma fonte externa de calor (representando a penetração da luz no corpo d'água) e T é a temperatura. Na equação (44), o termo $\partial T / \partial t$ representa a variação da temperatura com o tempo, o segundo termo do lado esquerdo é o termo advectivo e o termo entre colchetes no lado direito é o termo difusivo.

De acordo com Henderson-Sellers (1976), a estrutura térmica de lagos/reservatórios é dominado pelos gradientes de temperatura na vertical. Desta maneira, em muitos casos, se justifica a desconsideração dos gradientes horizontais e o problema pode ser abordado usando um modelo unidimensional (vertical). Os maiores gradientes ocorrem nas entradas e saídas do reservatório mas, para grande parte do reservatório, não representa uma parcela significativa.

Lagos e reservatórios são caracterizados pelas baixas velocidades e, em geral, grandes profundidades que fazem com que a estratificação vertical ganhe importância, já que a turbulência causada pelo escoamento é relativamente baixa e, então, a capacidade de mistura vertical causada pelo escoamento é inibida (GOBBI, 2005).

Como já mencionado, os processos de balanço energético ocorrem principalmente na interface água-ar. De acordo com Wetzel (1983), a transferência de calor do sedimento ocorre, mas, em lagos de profundidade moderada, essa entrada/saída é pequena comparada à absorção direta.

Tendo em vista as considerações descritas anteriormente, a equação que descreve a difusão turbulenta vertical unidimensional do calor é (HENDERSON-SELLERS, 1985):

$$A(z) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[A(z) K_H \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \frac{1}{\rho_w c_p} \frac{\partial A q}{\partial z} \quad (45)$$

na qual, z é a profundidade (m), $A(z)$ é a área de seção horizontal (m^2) - em função da profundidade z (m), t é o tempo (s), $T(z,t)$ é a temperatura como função de z (m) e t (s), K_H é o coeficiente de difusão turbulenta para transporte de calor na vertical (m^2s^{-1}) - soma da difusão molecular para calor (m^2s^{-1}) e turbulenta (m^2s^{-1}), ρ_w é a massa específica da água (kgm^{-3}) (em função da temperatura da água), c_p é o calor específico da água ($J\ kg^{-1}K^{-1}$) e $q(z,t)$ é uma função das fontes de calor ($J\ m^{-2}s^{-1}$) (devido a absorção de radiação solar na coluna d'água) – e condições de contorno apropriadas na superfície e no bordo inferior (descritas na seção 3.5).

Bedford e Babajimopoulos (1977) descrevem os modelos de transporte em dois tipos: 1 e 2. No primeiro, a dependência da área com a profundidade é incluída. No segundo, a dependência da área com a profundidade não é levada em conta, a área é considerada constante e a profundidade é média nos cálculos. Para o modelo tipo 2, a equação 45 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_H \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \frac{1}{\rho_w c_p} \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (46)$$

3.5 Modelos matemáticos

A equação (46) da difusão turbulenta unidimensional para o transporte de calor requer duas condições de contorno, uma na superfície e outra no fundo do lago, e uma condição inicial.

A condição de contorno na superfície descreve o fluxo de calor entre o lago e a atmosfera. O calor difundido na superfície é igual ao fluxo líquido de calor na superfície (que é resultado da radiação solar, evaporação, condução e emissão pela água). Esta condição pode ser descrita por (BABAJIMOPOULOS, PAPADOPOULOS, 1986):

$$-\rho_w c_p K_H \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = q_n = H_{sn} + H_{ri}(1 - a_L) - H_{ro} - H_e - H_c \quad (47)$$

na qual q_n representa o fluxo de calor na superfície.

Edinger, Duttweiler e Geyer (1968) propõem que o fluxo de calor, q_n , pode ser dado por:

$$q_n = K(T_e - T_s) \quad (48)$$

na qual: K é o coeficiente de transferência de calor ($W^\circ C^{-1}m^{-2}$), T_e é a temperatura de equilíbrio

(°C) e T_s é a temperatura da superfície (°C).

A temperatura de equilíbrio é definida como a temperatura na qual a taxa líquida de transferência de calor é zero. Na equação (48), o corpo d'água recebe calor se $T_s < T_e$ e perde quando $T_s > T_e$. Outro aspecto importante é que a taxa de transferência do calor é função da diferença entre a temperatura real e a temperatura de equilíbrio (EDINGER, DUTTWEILER, GEYER, 1968).

Temperatura de equilíbrio e coeficiente de transferência de calor são ambas funções de condições ambientais e podem ser relacionadas como funções da velocidade do vento, temperatura do ar, umidade e radiação líquida (SUNDARAM, REHM, 1971).

A outra condição de contorno, no bordo inferior, é que o fluxo de calor é zero. Portanto (GIANNIOU, ANTONOPOULOS, 2003; BABAJIMOPOULOS, PAPADOPOULOS, 1986):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (49)$$

A Figura 7 ilustra as condições de contorno.

Para o termo referente à fonte de calor, Dake e Harleman (1969) descrevem que de medidas de absorção da radiação solar em um corpo d'água, inicialmente há uma rápida atenuação seguida de uma variação exponencial:

$$q(z) = (1 - \beta)q_{sn} \exp(-\eta z) \quad (50)$$

na qual: β é a proporção da radiação líquida de ondas curtas absorvida na superfície, η é o coeficiente de absorção (ou extinção)(m^{-1}) e que é dependente da transparência da água e q_{sn} é a radiação líquida na superfície da água (DAKE, HARLEMAN, 1969). A radiação líquida na superfície de água é:

$$q_{sn} = (1 - a_s)q_s \quad (51)$$

na qual: a_s é o albedo e q_s é a radiação solar total (DAKE, HARLEMAN, 1969).

Considerando $\beta=1$ na equação (50), a radiação solar seria completamente absorvida na superfície. Já se $\beta=0$, há completa transmissão da radiação solar. De acordo com Dake e Harleman

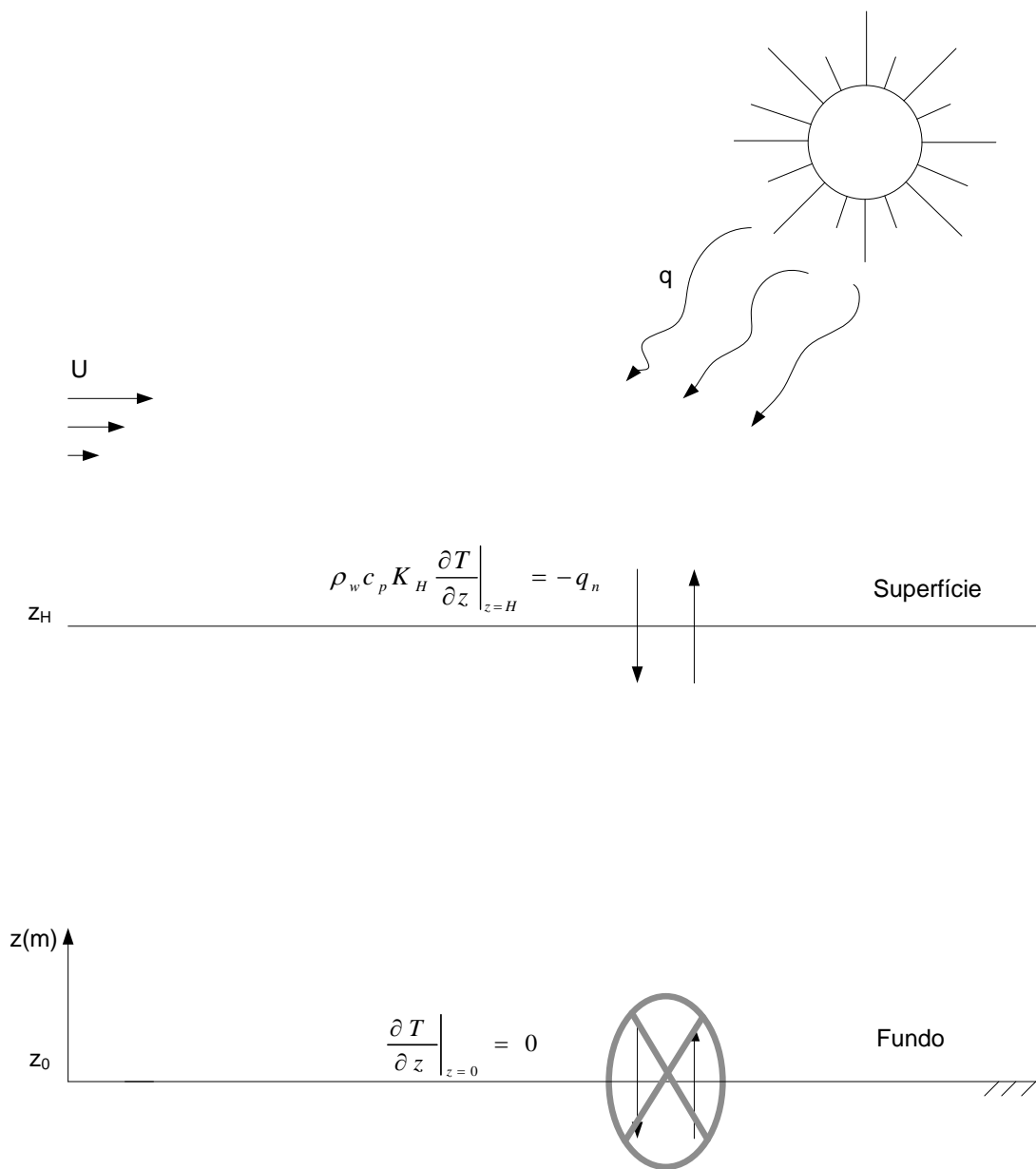


Figura 7: Condições de contorno do modelo

(1969), o valor de β é aproximadamente 0,4.

A turbidez da água determina a profundidade na qual a radiação pode penetrar e aquecer a água abaixo da superfície (HENDERSON-SELLERS, 1986). O coeficiente de extinção quantifica esse efeito da turbidez, sendo que este pode variar entre $0,1 \text{ m}^{-1}$ e $3,0 \text{ m}^{-1}$ (STEFAN, FORD, 1975). Uma relação para a determinação do coeficiente de atenuação é:

$$\eta = \frac{1,84}{z_{sd}} \quad (52)$$

na qual: z_{sd} é a profundidade de Secchi (m) (HONDZO, STEFAN, 1993). O coeficiente de atenuação pode ser estimado por (HONDZO, STEFAN, 1991):

$$\eta = \eta_w + \eta_{ss}SS + \eta_{ch}(chla) \quad (53)$$

na qual η_w é o coeficiente de extinção da água do lago, η_{ss} (0,043) é o coeficiente de extinção devido aos sedimentos suspensos ($\text{L m}^{-1} \text{ mg}^{-1}$), SS é a concentração de sedimento inorgânico suspenso (mg L^{-1}), η_{ch} (0,016) é o coeficiente de extinção devido à clorofila ($\text{L m}^{-1} \text{ mg}^{-1}$) e chl a é a concentração de clorofila a (mg L^{-1}).

A seguir, serão descritos alguns modelos de evolução térmica de lagos já desenvolvidos e sua abordagem de estudo.

Babajimopoulos e Papadopoulos (1986) desenvolveram um modelo para determinar os perfis de temperatura e, portanto, estudar a estratificação térmica no lago Ostrovo (Vegoritis) - Grécia. O modelo de matemático unidimensional para transferência do calor adotado considerou a variação da área com a profundidade. Para o balanço de calor entre a superfície do lago e o ambiente, relações empíricas para evaporação, condução, radiação absorvida e emitida foram estimadas. A difusividade turbulenta foi avaliada com a equação (20), na qual o coeficiente de difusão turbulenta na ausência de estratificação utilizado foi o proposto por Sundaram e Rehm (1973) na equação (31) e a função com o parâmetro de estabilidade da equação (30). A estimativa dos parâmetros das equações (30) e (31) foi realizada com uma análise de sensibilidade - os melhores resultados foram obtidos com: $c=12 \times 10^{-2}$, $\sigma=0,005$ e $n=0,5$. Devido à análise de sensibilidade dos parâmetros percebeu-se que os valores de c e σ afetam as temperaturas no epilímnio e hipolímnio, respectivamente. Uma das maiores dificuldades no modelo descrito acima é a quantificação do fluxo de calor na superfície, pela necessidade de muitos dados para aplicação de relações empíricas para obter boas estimativas. No caso do coeficiente de difusão

turbulenta neutro, a estimativa utilizada não leva em consideração a profundidade do lago (considera apenas a velocidade de atrito), sendo que a profundidade é importante neste aspecto - pois o vento (que causa turbulência) em muitos casos não age sobre toda a coluna d'água.

Sundaram e Rehm (1973) estudaram o comportamento do Lago Cayuga - Nova York, utilizando a equação de transferência de calor pelo modelo tipo 2, com área constante, usando como profundidade média 60 m. Para a determinação da condição de contorno na superfície do lago, utilizaram a abordagem de temperatura de equilíbrio. O coeficiente de difusão turbulenta do calor foi avaliado com a equação (20) e na ausência de estratificação, a equação (31) - com a velocidade de atrito assumindo uma função cíclica. A função contendo um parâmetro de estabilidade foi a equação (30) e os parâmetros estimados: $\sigma=0,1$ e $n=1$. Sundaram e Rehm (1973) ressaltam que a determinação do coeficiente de difusão turbulenta na condição de estratificação térmica proposto pela equação (20) é válido apenas para o epilímnio (já que em profundidades maiores a ação do vento é muito pequena) e supõem que o coeficiente de difusão turbulenta no hipolímnio é igual ao valor mínimo do coeficiente de difusão calculado com a equação (20). Os resultados obtidos mostraram que de maneira qualitativa obteve-se concordância entre as simulações e dados observados. O presente trabalho utilizará a temperatura de equilíbrio para calcular o fluxo de calor na superfície do lago, por se tratar de uma abordagem mais simples e fornecer bons resultados. Como no modelo descrito acima, neste trabalho o coeficiente de difusão turbulenta no hipolímnio será igual ao valor mínimo do coeficiente calculado pela equação (20).

Antonopoulos e Gianniou (2003) realizaram simulações para temperatura da água no Lago Vegoritis - Grécia, usando a equação unidimensional de transferência de calor (considerando a variação da área com a profundidade). Para o coeficiente de difusão turbulenta a mesma abordagem dos estudos citados anteriormente foi utilizado, com o coeficiente de difusão turbulenta na ausência de estratificação dado pela equação (31). Na determinação da condição de contorno na superfície do lago, foi utilizada a abordagem de temperatura de equilíbrio - e cujas formulações servirão de base para o presente estudo. As simulações obtidas concordavam aproximadamente com os dados medidos, com exceção (em alguns casos) na superfície e fundo do lago que, segundo os autores, pode ter ocorrido devido às estimativas de fluxo de calor.

3.6 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas consiste na expansão em série de Taylor para o cálculo de valores aproximados de derivadas.

Considerando-se uma função f , a expansão em série de Taylor de $f(x_{i+1})$ é:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots \quad (54)$$

Truncando a expansão na primeira derivada, pode-se obter uma aproximação da derivada primeira:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i) \quad (55)$$

conhecida como diferença progressiva, na qual $O(x_{i+1} - x_i)$ é o erro devido ao truncamento. De maneira análoga, pode ser obtida uma aproximação da primeira derivada por diferença regressiva, expandindo a série de Taylor para $f(x_{i-1})$, obtendo-se:

$$f'(x_{i-1}) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + O(x_i - x_{i-1}) \quad (56)$$

e, uma aproximação por diferença centrada, subtraindo-se a expansão da série de Taylor regressiva da expansão progressiva:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} + O((x_{i+1} - x_{i-1})^2) \quad (57)$$

Das três aproximações para a primeira derivada de uma função f , a análise pela diferença centrada traz uma representação mais acurada da derivada, como mostrado na Figura 8.

Além das primeiras derivadas, a expansão em série de Taylor pode ser usada para deduzir estimativas de derivadas superiores (CHAPRA, CANALE, 2008). Para a segunda diferença finita progressiva, regressiva e centrada temos, respectivamente:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{(x_{i+2} - x_{i-1})^2} + O(x_{i+2} - x_{i-1}) \quad (58)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{(x_i - x_{i-2})^2} + O(x_i - x_{i-2}) \quad (59)$$

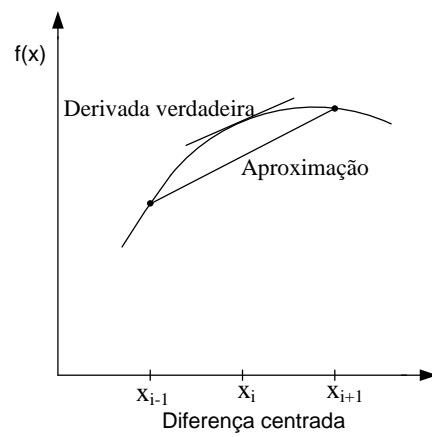
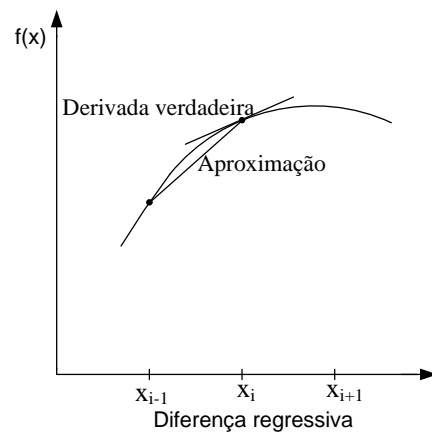
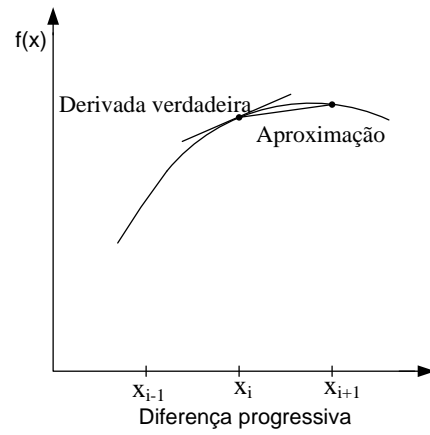


Figura 8: Aproximações para primeira derivada de uma função
 Fonte: CHAPRA e CANALE (2008)

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{(x_{i+1} - x_{i-1})^2} + O((x_{i+2} - x_{i-1})^2) \quad (60)$$

Como no caso das aproximações da primeira derivada, o caso centrado é o mais acurado na estimativa da segunda derivada.

A seguir, serão apresentados os esquemas explícito e implícito para solução de equações diferenciais parciais parabólicas, para o caso geral da equação de condução do calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (61)$$

que exige aproximações para a segunda derivada no espaço e para a primeira derivada no tempo (CHAPRA, CANALE, 2008).

3.6.1 Método explícito

A derivada segunda na equação da condução do calor pode ser aproximada por diferença centrada (CHAPRA, CANALE, 2008):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta z^2} \quad (62)$$

na qual o subscrito i indica o espaço e o sobrescrito l o tempo. Para o tempo é necessária uma aproximação da primeira derivada (aqui será mostrada a diferença progressiva):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad (63)$$

Substituindo esses resultados na equação (61), temos:

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta z^2} \quad (64)$$

que pode ser reescrita como:

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \frac{k\Delta t}{(\Delta z)^2} (T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l) \quad (65)$$

Este método de solução calcula cada nó para um instante futuro baseado nos valores atuais no nó e em seus vizinhos. A Figura (9) ilustra os pontos de grade envolvidos para a solução da equação pelo método explícito.

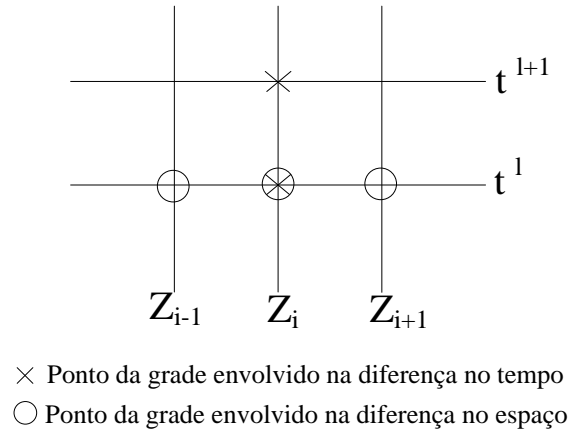


Figura 9: Pontos da grade envolvidos no método explícito
 Fonte: CHAPRA e CANALE (2008)

Para que a solução obtida pelo explícito seja tanto convergente quanto estável, deve satisfazer o seguinte critério (CHAPRA, CANALE, 2008):

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta z^2}{k} \quad (66)$$

Devido a esse critério, a carga computacional pode ser grande para atingir a acurácia aceitável.

3.6.2 Método implícito

A aplicação do método implícito para a solução de uma equação diferencial parcial não implica em problemas relacionados a estabilidade da solução (do método explícito). Neste caso, a derivada espacial é aproximada em um nível de tempo avançado, $l+1$ (CHAPRA, CANALE, 2008). Para a derivada segunda na equação (61):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta z^2} \quad (67)$$

Substituindo a equação (67) e utilizando a aproximação da equação (63) na equação da condução do calor (61):

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta z^2} \quad (68)$$

que possui diversas incógnitas - não podendo, assim, ser resolvida explicitamente. Essa equação se aplica a todos, exceto o primeiro e últimos nós interiores, nos quais precisa ser modificada para refletir as condições de contorno. O sistema de equações deve ser resolvido simultaneamente, juntamente com as condições de contorno, pois o conjunto de equações é linear e com o mesmo número de incógnitas (CHAPRA, CANALE, 2008). A figura 10 ilustra os pontos de grade envolvidos para a solução da equação pelo método implícito.

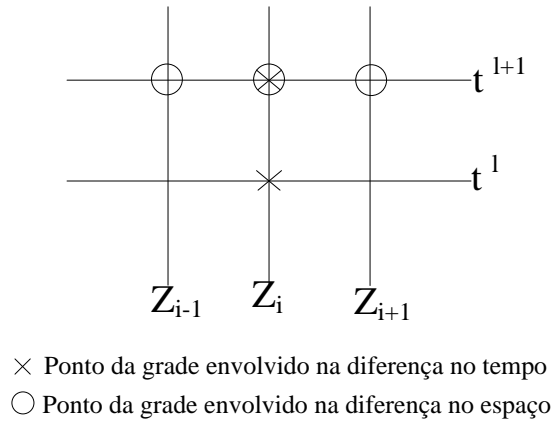


Figura 10: Pontos da grade envolvidos no método implícito

Fonte: CHAPRA e CANALE (2008)

3.6.3 Método de Crank-Nicolson

É um método que fornece um esquema implícito alternativo. São desenvolvidas aproximações por diferença no ponto médio do incremento no tempo. A primeira derivada no tempo pode ser aproximada por (CHAPRA, CANALE, 2008):

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad (69)$$

e, a segunda derivada no espaço determinada no ponto médio tomando-se a média da aproximação por diferenças nos incrementos de tempo l e $l+1$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta z^2} + \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta z^2} \right] \quad (70)$$

que, substituídas na equação (61):

$$-k \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{i-1}^{l+1} + 2(1 + k \frac{\Delta t}{\Delta z^2}) T_i^{l+1} - k \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{i+1}^{l+1} = k \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{i-1}^l + 2(1 - k \frac{\Delta t}{\Delta z^2}) T_i^l + k \frac{\Delta t}{\Delta z^2} T_{i+1}^l \quad (71)$$

Como no método implícito descrito anteriormente, as condições de contorno podem ser impostas para os cálculos no primeiro e último nó interior (CHAPRA, CANALE, 2008). A Figura 11 ilustra os pontos de grade envolvidos para a solução da equação pelo método de Crank-Nicolson.

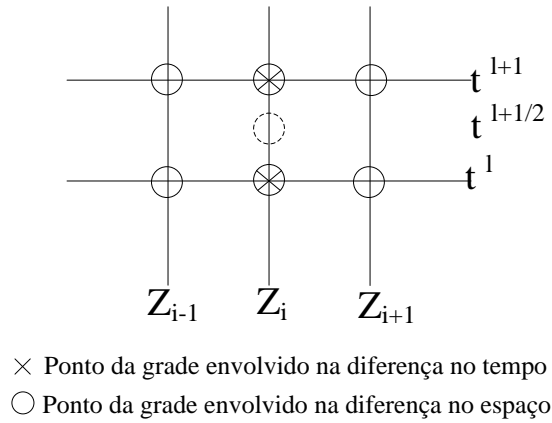


Figura 11: Pontos da grade envolvidos no método de Crank Nicolson
 Fonte: CHAPRA e CANALE (2008)

4 Descrição do Modelo

O modelo desenvolvido neste estudo teve como base os estudos de Antonopoulos e Gianniou (2003) e Henderson-Sellers (1985). A seguir é apresentado o conjunto de equações utilizadas para a solução do problema de evolução térmica de lagos e o fluxograma do programa, na Figura (12) .

A equação da difusão do calor é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_H \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \frac{1}{\rho_w c_p} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (72)$$

tendo como condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (73)$$

$$\rho_w c_p K_H \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = -q_n. \quad (74)$$

Na condição de contorno na superfície, o fluxo de calor entre o ambiente e a superfície do reservatório é determinado com base na equação:

$$q_n = K(T_e - T_s) \quad (75)$$

na qual o coeficiente de transferência de calor é determinado como (GIANNIOU, ANTONOPOULOS, 2003):

$$K = 4,5 + 0,05T_s + \delta f(U) + 0,47f(U) \quad (76)$$

em que:

$$f(U) = 9,2 + 0,46U^2 \quad (77)$$

$$\delta = 0,35 + 0,015T_m + 0,0012T_m^2 \quad (78)$$

$$T_m = \frac{T_s + T_d}{2} \quad (79)$$

$$T_d = \frac{237,3 \times var}{17,2694 - var} + 273,96 \quad (80)$$

$$var = \frac{17,2694(T_a + 273,16)}{(T_a - 35,86)} + \ln UR \quad (81)$$

em que: U é a velocidade do vento (ms^{-1}), medida a dois metros da superfície, T_d é a temperatura do ponto de orvalho ($^{\circ}\text{C}$), UR é a umidade relativa e T_m em $^{\circ}\text{C}$.

A temperatura de equilíbrio é calculada pela equação (GIANNIOU, ANTONOPOULOS, 2003):

$$T_e = T_d + \frac{q_{ns}}{K} \quad (82)$$

na qual q_{ns} ($=\beta q_s$) é a radiação solar de onda curta na superfície (W m^{-2}).

O termo referente à fonte de calor é calculado com base na equação 50 proposta por Dake e Harleman (1969).

As estimativas de difusão turbulenta foram obtidas com base na equação:

$$K_H = \frac{\kappa w_s^*(z_H - z)}{P_0} \exp(-k^*(z_H - z)) \frac{1}{1 + 37Ri^2} \quad (83)$$

para perfil de temperatura estratificado e, se o perfil for não estratificado:

$$K_{H_0} = \frac{\kappa w_s^*(z_H - z)}{P_0} \exp(-k^*(z_H - z)) \quad (84)$$

nas quais a velocidade de atrito superficial foi estimada como:

$$w_s^* = 0,0012U. \quad (85)$$

Com relação à difusão turbulenta, caso o modelo estime valores menores que a difusão molecular, esta é tomada para os cálculos. O valor de difusão molecular definido, neste caso, foi de $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. De acordo com Henderson-Sellers (1984), a uma temperatura de 0°C , a difusão molecular é de $1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ e à 25°C , $1,36 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Tal parametrização para a difusão foi utilizada pois tem a vantagem de não necessitar de calibração.

Para o número de Richardson:

$$Ri = (z_H - z)^2 \frac{N^2}{w^{*2}_s} \quad (86)$$

na qual:

$$N^2 = g\alpha_v \frac{\partial T}{\partial z} \quad (87)$$

e,

$$\alpha_v = 1,43 \times 10^{-5} T(z) - 0,54 \times 10^{-4}, \quad (88)$$

para $T < 11^\circ\text{C}$ e, para $T > 11^\circ\text{C}$:

$$\alpha_v = 1,41 \times 10^{-5} T(z) - 0,209 \times 10^{-4}. \quad (89)$$

A massa específica e calor específico da água foram calculadas com base nas equações (90) e (91) para a água pura (FOFONOFF, MILLARD, 1983):

$$\rho_w = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4 + a_5 T^5 \quad (90)$$

na qual:

$$\begin{aligned} a_0 &= 999,842594 \\ a_1 &= 0,06793952 \\ a_2 &= -0,009095290 \\ a_3 &= 1,00168510^{-4} \\ a_4 &= -1,12008310^{-6} \\ a_5 &= 6,53633210^{-9} \end{aligned}$$

e

$$c_p = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3 + c_4 T^4 \quad (91)$$

na qual:

$$\begin{aligned}c_0 &= 4217,4 \\c_1 &= -3,720283 \\c_2 &= 0,1412855 \\c_3 &= -0,002654387 \\c_4 &= 0,00002093236.\end{aligned}$$

Para determinar se há estratificação da coluna d'água o critério utilizado foi: se a variação vertical da massa específica for maior que $0,1 \text{ kg m}^{-3}$ há estratificação (JIRKA, DONEKER, HINTON, 1996).

4.1 Estabilização dos perfis de temperatura

À medida que ocorre o resfriamento da superfície de um lago, tem-se um aumento da densidade da camada d'água, tornando o sistema instável. O resultado deste processo é uma mistura violenta, até que a densidade da camada afetada seja uniforme (ORLOB, SELNA, 1970). Desta maneira, é necessária uma representação no modelo para a mistura convectiva – ou seja, no caso em que a temperatura de uma camada mais próxima à superfície seja menor que uma temperatura de uma camada inferior (ORLOB, SELNA, 1970).

Cancelli (2006) redistribui a temperatura de um perfil instável por meio de uma média ponderada entre as temperaturas e áreas da camada instável. Desta maneira, todas as camadas onde o perfil é instável têm sua temperatura substituída por uma temperatura média.

Neste trabalho, a redistribuição da temperatura foi obtida através da média das temperaturas na camada instável, tendo em vista que a área é constante. Desta maneira, a temperatura média é:

$$\bar{T} = \frac{\sum_{k=1}^l T_k}{l}, \quad (92)$$

na qual: \bar{T} é a temperatura média calculada, que substituirá a camada instável do perfil de temperatura e l é o número total de pontos onde foi verificada a instabilidade do perfil de temperatura. Nos testes realizados com este modelo, a estabilização do perfil de temperatura é aplicada apenas para o estudo de caso.

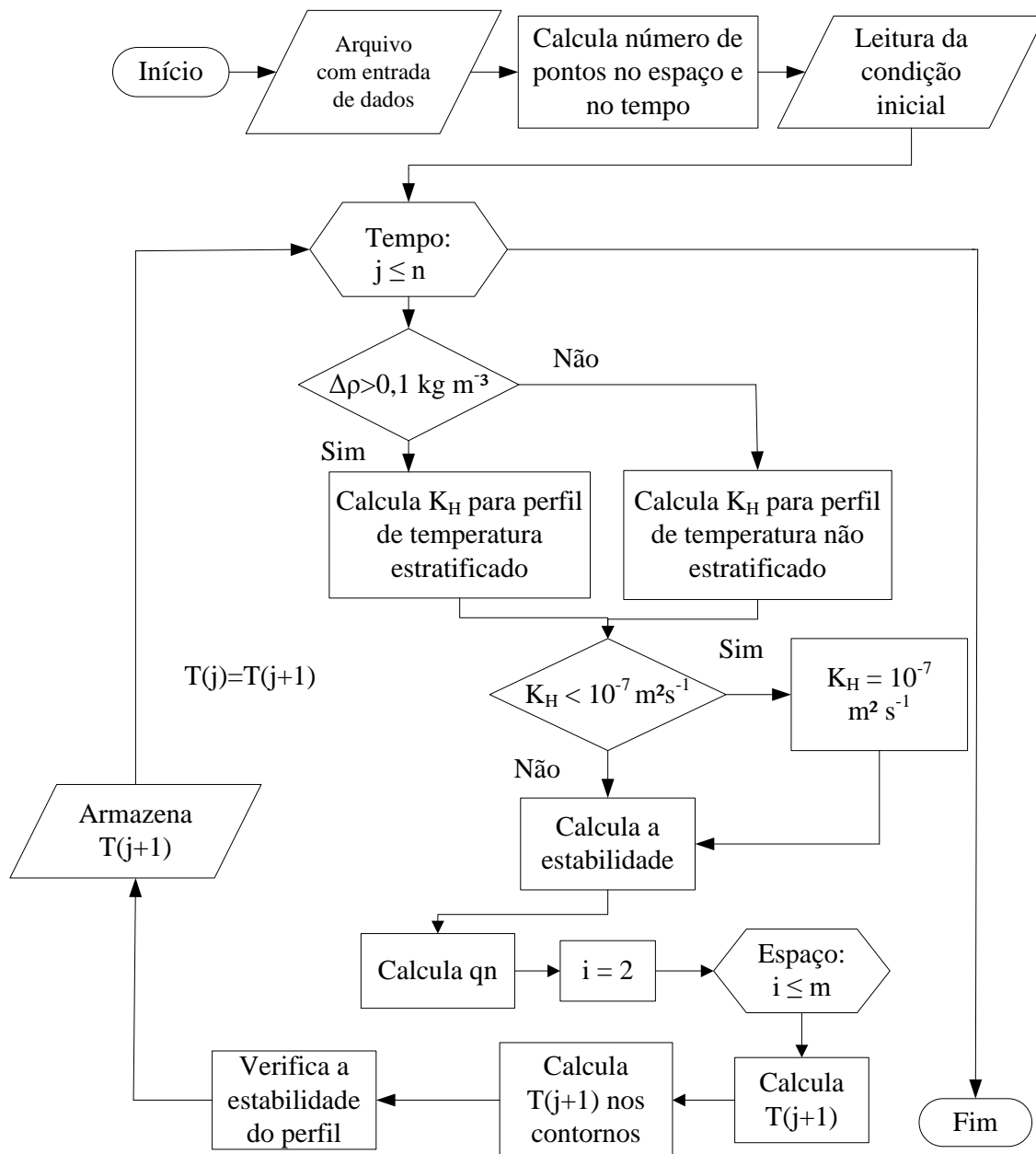


Figura 12: Fluxograma de execução do programa

5 Discretização do modelo matemático

O modelo matemático foi discretizado utilizando o Método das Diferenças Finitas explícito descrito anteriormente. Por este motivo, houve a necessidade do atendimento do critério de estabilidade da equação (66), no qual foi calculado o intervalo de tempo, Δt , com base no comprimento Δz escolhido arbitrariamente e no valor máximo do coeficiente de difusão turbulento estimado, conforme a equação (93):

$$\Delta t = \frac{1}{2} \frac{\Delta z^2}{K_{H_{max}}} \quad (93)$$

em que $K_{H_{max}}$ é o coeficiente de difusão turbulento máximo.

A seguir, descreve-se a discretização da equação diferencial e condições de contorno.

5.1 Discretização da equação do transporte de calor

A equação que descreve o transporte de calor no lago é a equação (46). Aplicando o método explícito para cada termo, obtém-se:

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = K_{H_i}^j \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta z^2} \right] - \frac{1}{\rho_{w_i}^j c_{p_i}^j} \left[\frac{q_{i+1}^j - q_i^j}{\Delta z} \right] \quad (94)$$

na qual os índices i e j referem-se aos passos no espaço e tempo, respectivamente. Neste caso, isolando o termo de temperatura no intervalo de tempo futuro temos:

$$T_i^{j+1} = \Delta t \left[K_{H_i}^j \left(\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta z^2} \right) - \frac{1}{\rho_{w_i}^j c_{p_i}^j} \left(\frac{q_{i+1}^j - q_i^j}{\Delta z} \right) \right] + T_i^j \quad (95)$$

em que a temperatura no instante $j+1$ é calculada com base nos valores de temperatura do instante j . A Figura (13) ilustra alguns pontos envolvidos na aplicação do método.

Na aplicação do método, foram incluídos dois pontos fictícios: acima da superfície e abaixo do fundo (à uma distância de $\Delta z/2$ desses pontos) aos quais foram aplicadas as condições de contorno. As temperaturas na superfície e no fundo foram obtidas por interpolação linear entre os pontos fictícios e os subsequentes.

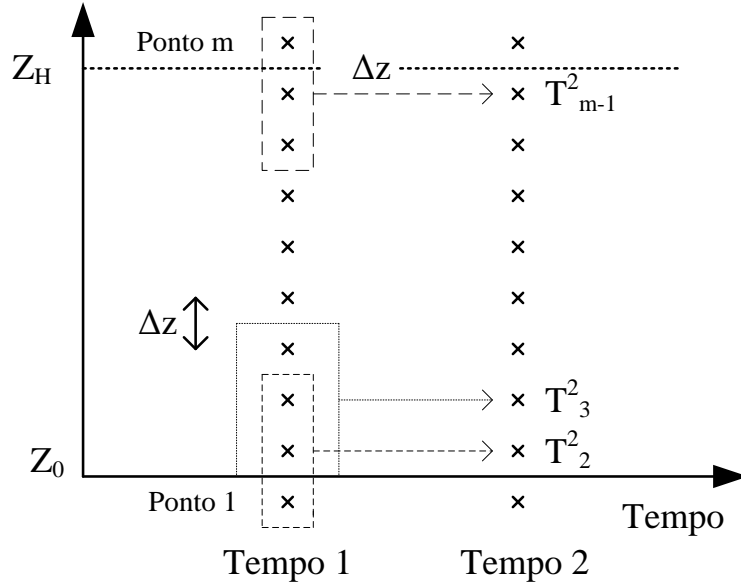


Figura 13: Esquema de aplicação do Método das Diferenças Finitas explícito no Modelo para alguns pontos

5.2 Discretização das condições de contorno

A condição de contorno no fundo do lago, já descrita anteriormente:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (96)$$

Aplicando o método de diferenças finitas explícito obtém-se:

$$\frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta z} = 0 \quad (97)$$

O sistema de referência utilizado considera a elevação do lago, conforme a Figura (1), portanto:

$$T_1^j = T_2^j. \quad (98)$$

A condição de contorno na superfície do reservatório:

$$\rho_w c_p K_H \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = -q_n \quad (99)$$

discretizada conforme o método explícito:

$$\rho_{w_i}^j c_{p_i}^j K_{H_i}^j \left[\frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta z} \right] = -q_n \quad (100)$$

considerando o sistema de referência adotado:

$$T_m^j = \frac{q_n \Delta z}{\rho_{w_i}^j c_{p_i}^j K_{H_i}^j} + T_{m-1}^j \quad (101)$$

na qual m representa o número total de pontos relacionados à distância Δz e à profundidade.

6 Simulações

O primeiro conjunto de simulações foi realizado com o objetivo de verificar a resposta do modelo numérico a diferentes condições de vento e radiação solar. Nesta etapa, consideram-se todos os forçantes meteorológicos constantes, a difusão turbulenta variável tanto no tempo quanto no espaço, a profundidade do lago de 10 m e a espessura arbitrada da camada em $\Delta z = 0,5$ m.

Ressalta-se que nesta etapa não foram realizadas estabilizações dos perfis de temperatura, portanto, em alguns testes são representados episódios de instabilidade térmica, que fisicamente não são possíveis. A seguir são apresentados os testes e resultados obtidos com o modelo numérico para as situações descritas anteriormente.

Com relação ao coeficiente de difusão turbulenta, foi estabelecido no modelo para a difusão molecular o valor de $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, conforme Henderson-Sellers (1984). Portanto, caso o modelo estime valor menor que a difusão molecular, o valor de $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ será adotado.

6.1 Velocidade do Vento e Radiação Solar

No primeiro conjunto de testes deseja-se estudar o efeito que a velocidade do vento e radiação solar tem sobre o sistema. Nos Testes 1, 2, 5 e 6 inicia-se a simulação com um perfil de temperatura estratificado e, nos Testes 3, 4, 7 e 8, um perfil de temperatura constante é usado como condição inicial. Os gráficos (14) e (15) apresentam as condições iniciais dos testes e a tabela (1) apresenta os dados de cada teste.

6.1.1 Teste 1

No primeiro teste, os dados utilizados estão representados na tabela (1) e a condição inicial na Figura (14). A Figura (16) apresenta os perfis de temperatura calculados pelo modelo em um período de 200 dias. O valor máximo de difusão turbulenta nesta simulação foi de $5,7123 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ e o passo de tempo estimado com base na equação (93) foi de 21.882,4 s ou, aproximadamente 6 h. Não será apresentada a visualização gráfica da difusão turbulenta, tendo em vista que apenas na camada superior a difusão assumiu valor maior que a difusão molecular.

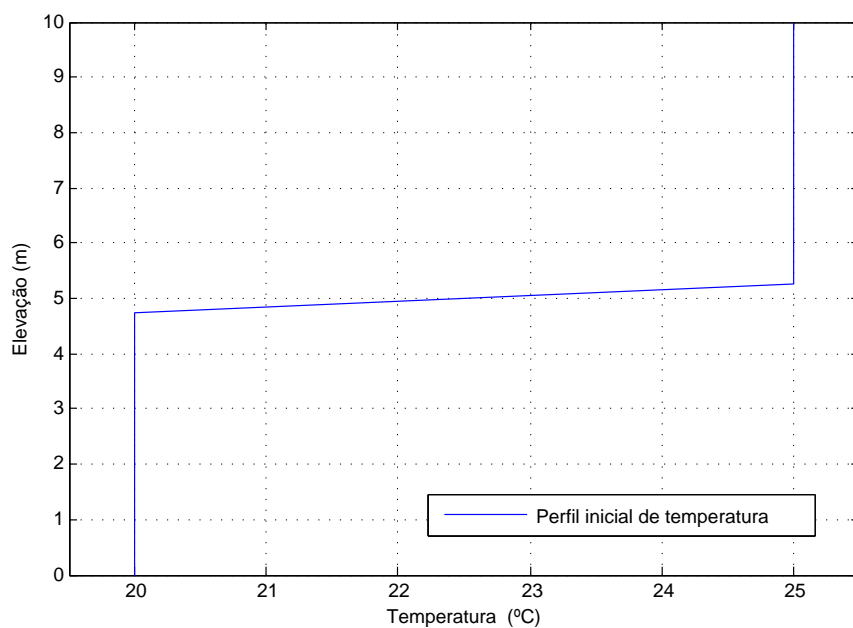


Figura 14: Perfil de temperatura inicial para os Testes 1, 2, 5 e 6

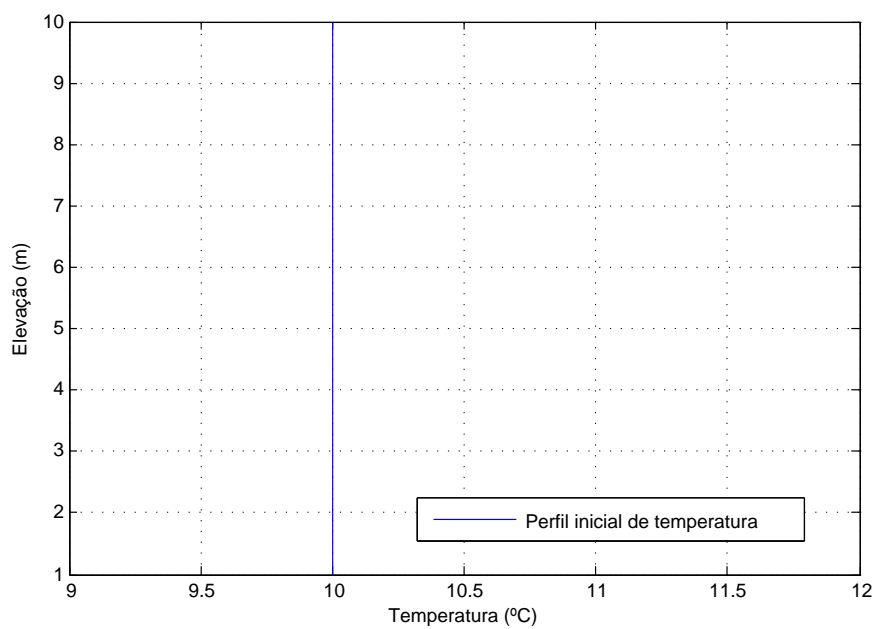


Figura 15: Perfil de temperatura inicial para os Testes 3, 4, 7 e 8

Dados	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
Perfil inicial	Estratificado	Estratificado	Constante	Constante
Tempo de simulação (dias)	200	20	2000	20
$U \text{ (ms}^{-1}\text{)}$	0,5	10	0,5	10
UR(%)	0,65	0,65	0,65	0,65
$T_a \text{ (}^\circ\text{C)}$	22	22	22	22
$q_s \text{ (Wm}^{-2}\text{)}$	350	350	350	350
β	0,4	0,4	0,4	0,4
a_s	0,07	0,07	0,07	0,07
$\eta \text{ (m}^{-1}\text{)}$	0,1	0,1	0,1	0,1
Dados	Teste 5	Teste 6	Teste 7	Teste 8
Perfil inicial	Estratificado	Estratificado	Constante	Constante
Tempo de simulação (dias)	2500	20	2500	20
$U \text{ (ms}^{-1}\text{)}$	0,5	10	0,5	10
UR(%)	0,65	0,65	0,65	0,65
$T_a \text{ (}^\circ\text{C)}$	22	22	22	22
$q_s \text{ (Wm}^{-2}\text{)}$	23	23	23	23
β	0,4	0,4	0,4	0,4
a_s	0,07	0,07	0,07	0,07
$\eta \text{ (m}^{-1}\text{)}$	0,1	0,1	0,1	0,1

Tabela 1: Dados referentes aos testes da resposta do modelo para vento e radiação solar

O perfil de temperatura é inicialmente estável, no entanto, devido à perda de energia na superfície, ocorre a instabilidade da camada, comprovado pelo gráfico (17) que apresenta o número de Richardson para todos os perfis de temperatura. Apenas a partir do 182º dia de simulação o lago passa a receber energia, conforme o gráfico (18). A temperatura de equilíbrio estimada na superfície do lago é aproximadamente 21,7°C. Neste caso, o último perfil de temperatura mostra que o sistema volta a ser estável (com variação de 0,31°C entre a superfície e o fundo) e com perfil próximo a temperatura de equilíbrio, do qual, mesmo aumentando o período de simulação, não há variação significativa da temperatura.

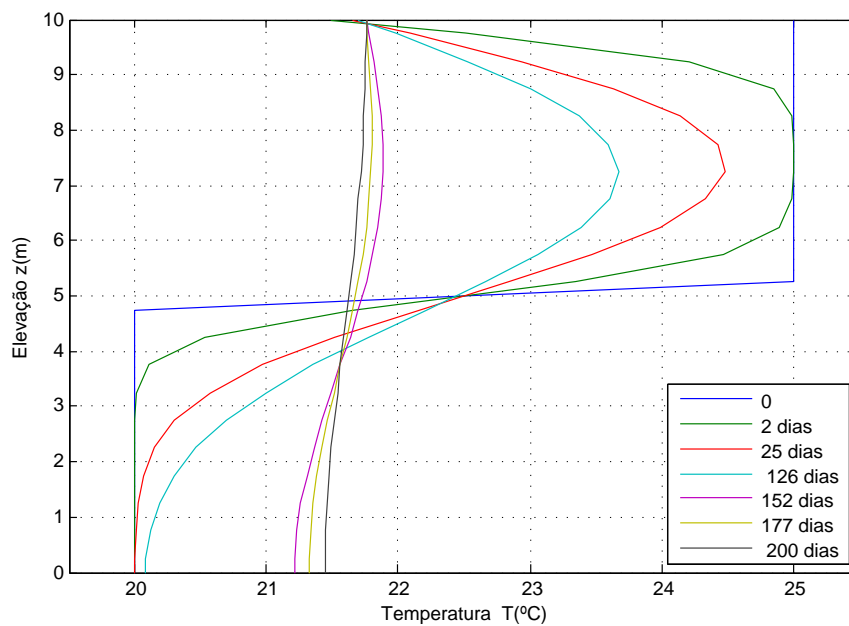


Figura 16: Perfis de Temperatura – Teste 1

6.1.2 Teste 2

No segundo teste, os dados utilizados estão representados na tabela (1) e a condição inicial na Figura (14). Devido ao critério de estabilidade do método explícito, o passo de tempo é de 4 s, e o coeficiente de difusão turbulenta máximo de $2,829 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Ressalta-se que houve a impossibilidade da realização dos testes para um período de tempo maior, tendo em vista o grande número de iterações necessárias. No entanto, pôde-se observar a estabilização do perfil de temperatura durante o período de tempo simulado.

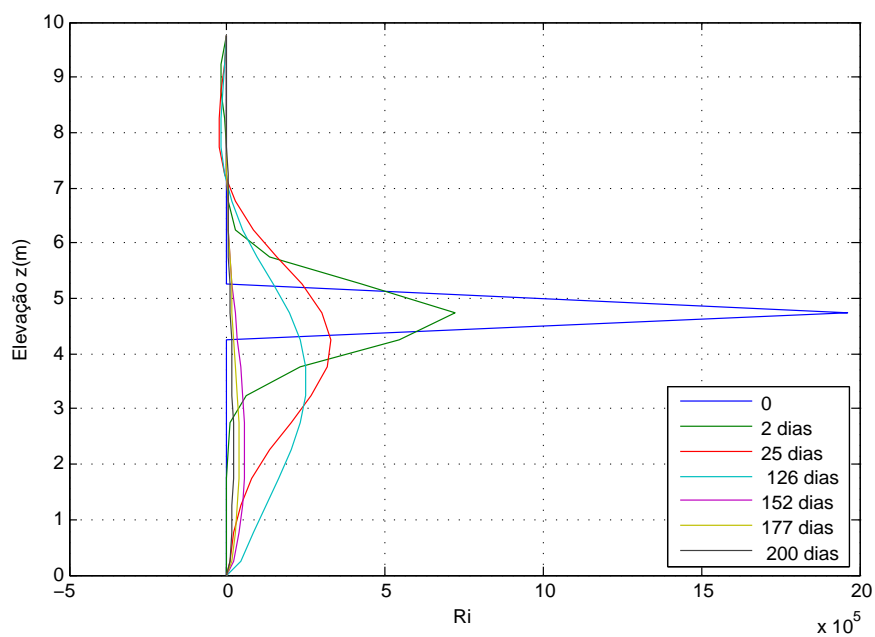


Figura 17: Número de Richardson – Teste 1

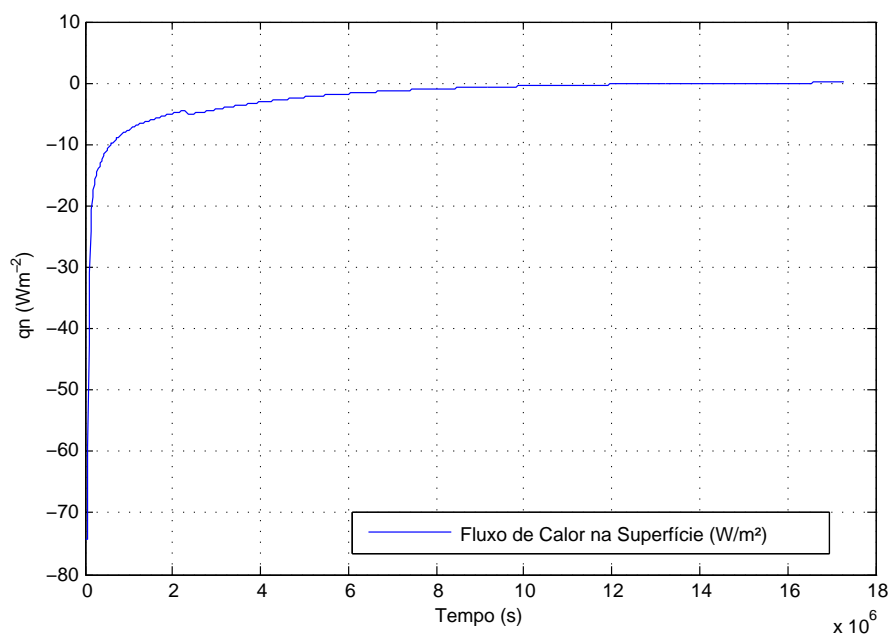


Figura 18: Fluxo de energia na Superfície – Teste 1

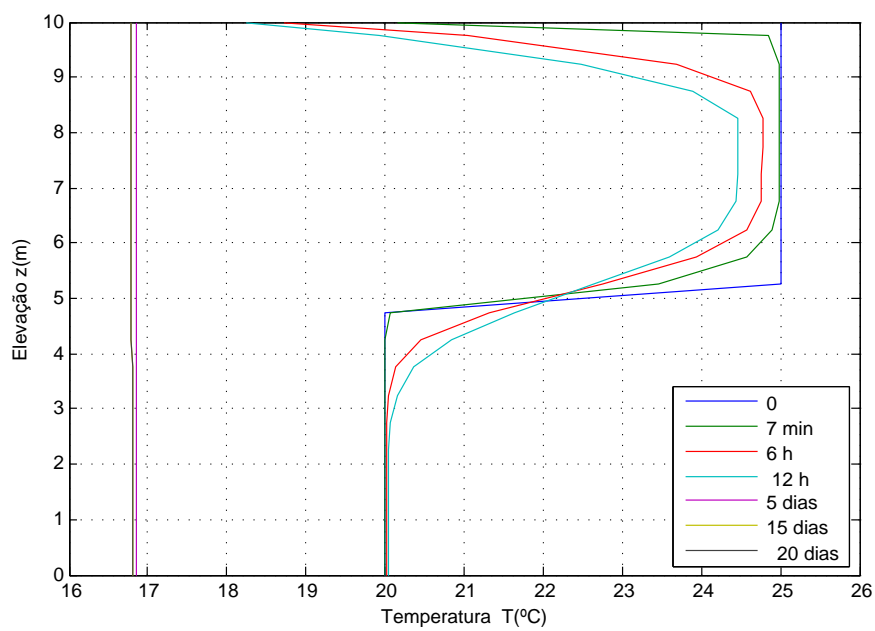


Figura 19: Perfis de Temperatura – Teste 2

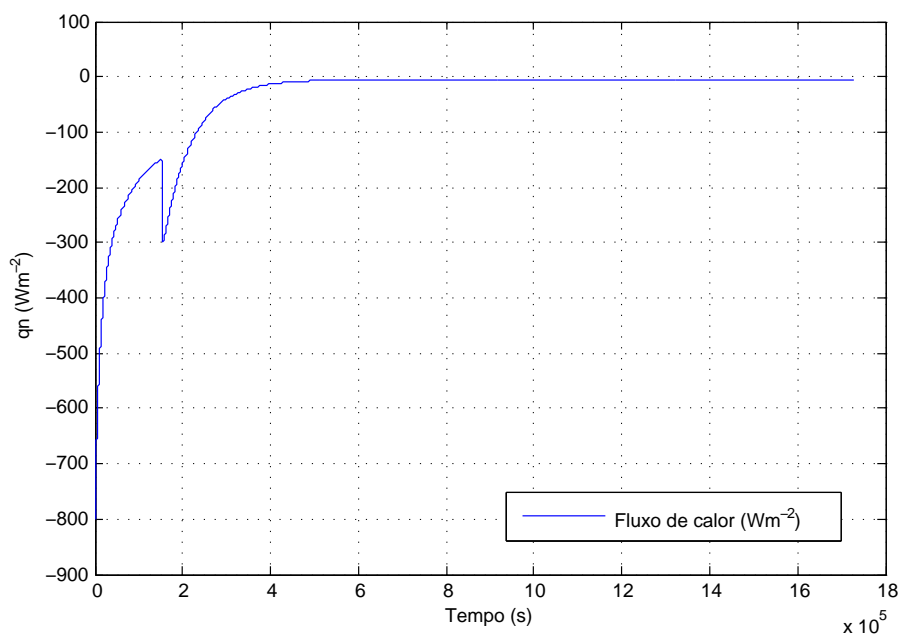


Figura 20: Fluxo de energia na Superfície – Teste 2

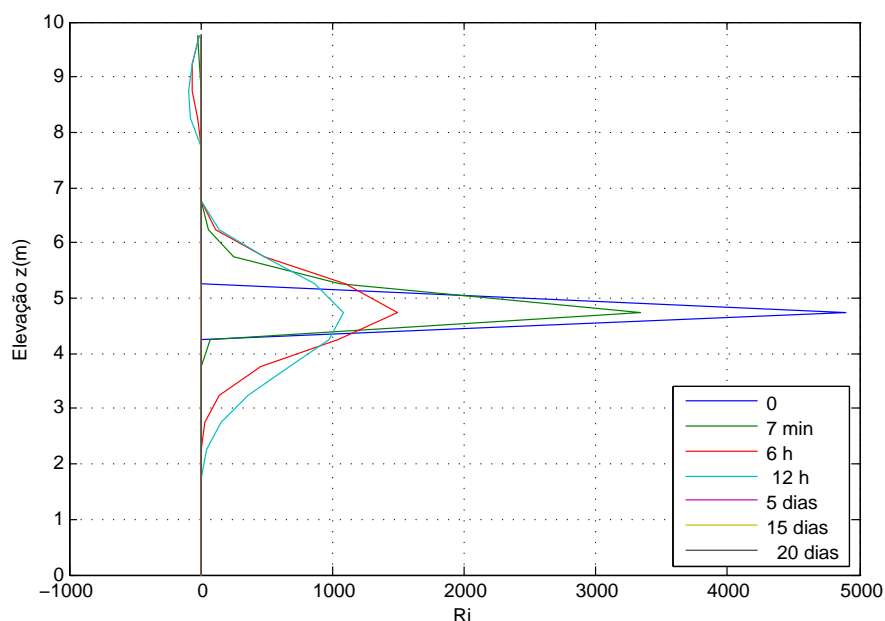


Figura 21: Número de Richardson – Teste 2

Nesta simulação também ocorre instabilização do perfil de temperatura (gráfico (19)) devido a perda de energia da superfície do lago para o ambiente (gráfico (20)). O número de Richardson representa adequadamente as situações de estabilidade e instabilidade das camadas, conforme a Figura (21), tendo em vista os critérios de estabilidade definidos para o número de Richardson.

O gráfico (22) apresenta o resultado do modelo para o coeficiente de difusão turbulenta. É importante notar que, para o perfil inicial de temperatura, a difusão na região da termoclina é a difusão molecular, tendo em vista que esta é uma camada bastante estável e que reduz significativamente a mistura da coluna d'água. À medida que a estratificação é quebrada, ocorre aumento da difusão turbulenta em toda a coluna d'água.

6.1.3 Teste 3

No terceiro teste, os dados utilizados estão representados na tabela (1), a condição inicial no gráfico (15) e os perfis simulados no gráfico (23).

Na simulação do Teste 3 foram necessários 2000 dias de simulação para que fosse atingido um perfil constante de temperatura. É importante notar que, neste teste, o lago apenas recebe

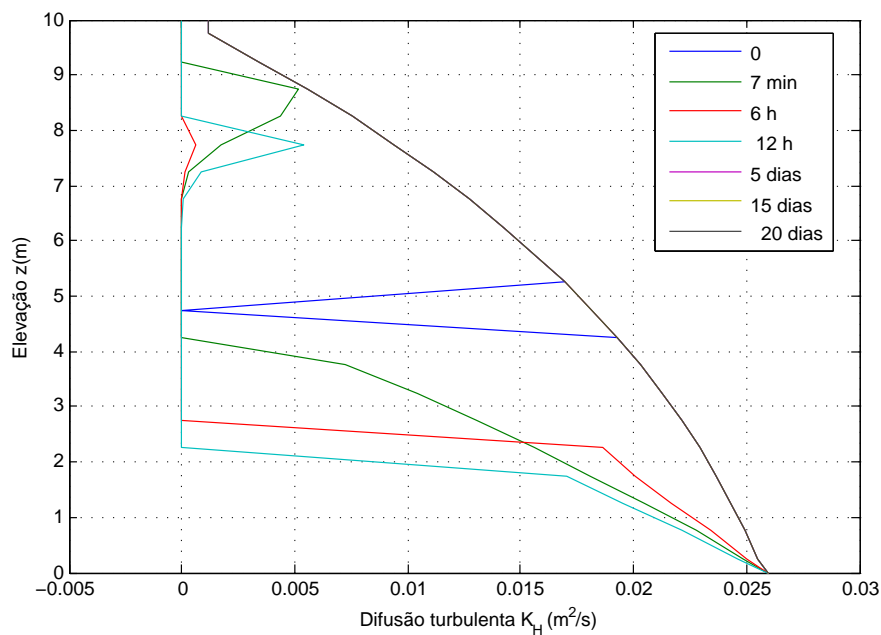


Figura 22: Coeficiente de difusão turbulenta – Teste 2

energia, não tendo nenhum sumidouro como nos casos anteriores, nos quais parte da energia era perdida para o ambiente. O perfil inicial é neutro, no entanto, após a primeira iteração no tempo, ocorre a estratificação da camada superficial devido ao grande fluxo de energia na superfície e, consequentemente, aumento da temperatura da camada superficial. A estratificação térmica é quebrada apenas 455 dias depois do início da simulação. O gráfico (24) apresenta a fluxo de energia na superfície do lago.

O coeficiente de difusão turbulento máximo foi de $5,7123 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ e o passo de tempo de 21.882,4 s ou, aproximadamente 6 h. O gráfico (25) apresenta o número de Richardson para alguns perfis simulados, nos quais destaca-se que há estabilidade térmica durante todo o período representado. Não será apresentada a visualização gráfica da difusão turbulenta, tendo em vista que apenas na camada superior a difusão assumiu valor maior que a difusão molecular.

6.1.4 Teste 4

No quarto teste, os dados utilizados estão representados na tabela (1), a condição inicial no gráfico (15) e os perfis simulados no gráfico (26).

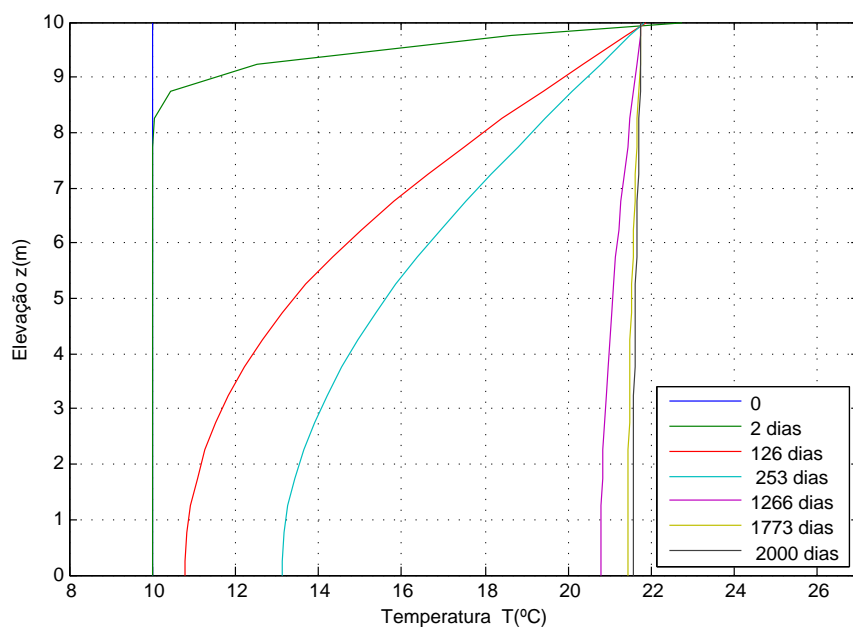


Figura 23: Perfis de Temperatura – Teste 3

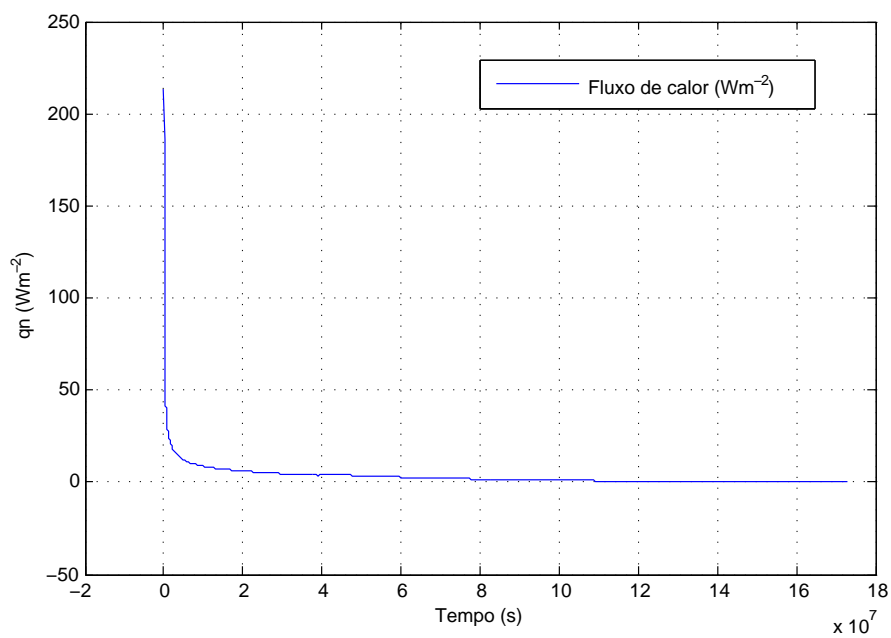


Figura 24: Fluxo de energia na Superfície – Teste 3

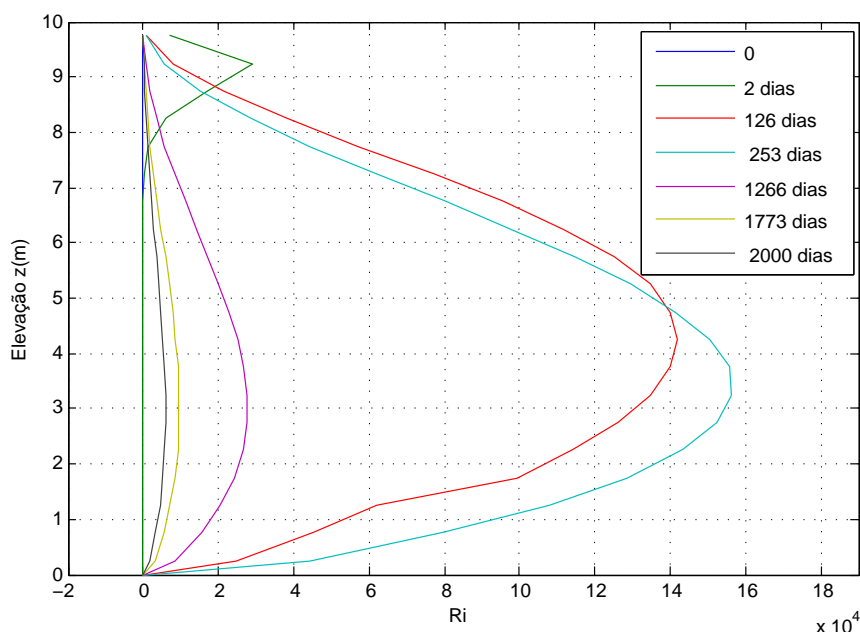


Figura 25: Número de Richardson – Teste 3

Da mesma maneira que para o Teste 2 também não foi possível simular os perfis de temperatura para períodos maiores que 20 dias, devido ao pequeno passo de tempo entre as simulações ($\Delta t=4$ s) e, portanto, grande número de iterações. O coeficiente de difusão turbulento máximo foi de $2,829 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

Neste teste, o perfil de temperatura permanece estável durante 5 dias de simulação (o lago recebe energia devido ao fluxo na superfície), com temperatura variando no máximo $0,2^\circ\text{C}$ (da superfície para o fundo), devido a intensa ação do vento, que promove a mistura de toda a camada, e não é verificada a estratificação da coluna d'água. Após esse período, é observada a perda de energia na superfície do lago, e o número de Richardson calculado mostra a instabilidade do perfil de temperatura (gráfico (27)), no qual a diferença de temperatura entre a camada superficial e do fundo é de $-0,0018^\circ\text{C}$.

Com relação à difusão turbulenta, o gráfico (29) apresenta os valores calculados pelo modelo. Tendo em vista que o perfil de temperatura e a velocidade do vento são constantes, não há variação da difusão turbulenta com o tempo.

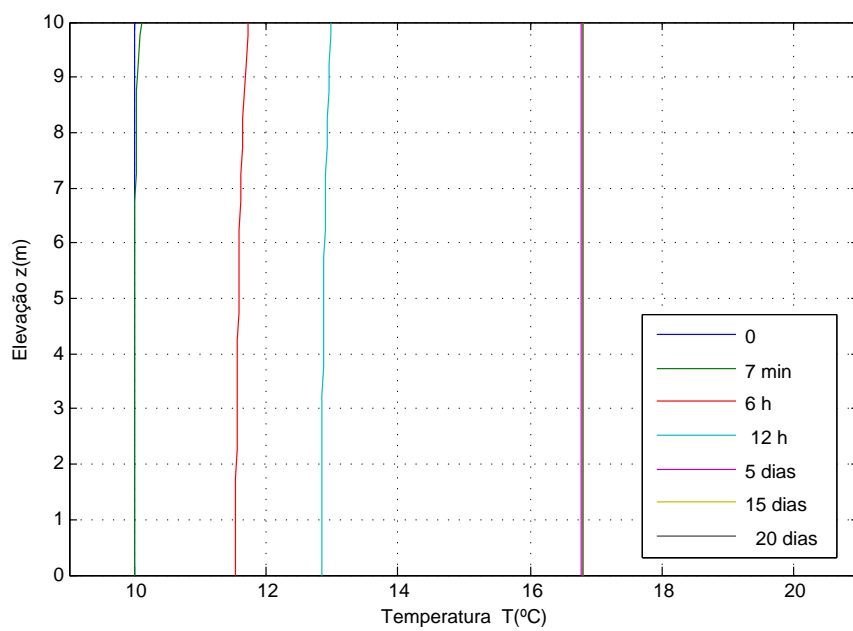


Figura 26: Perfis de Temperatura – Teste 4

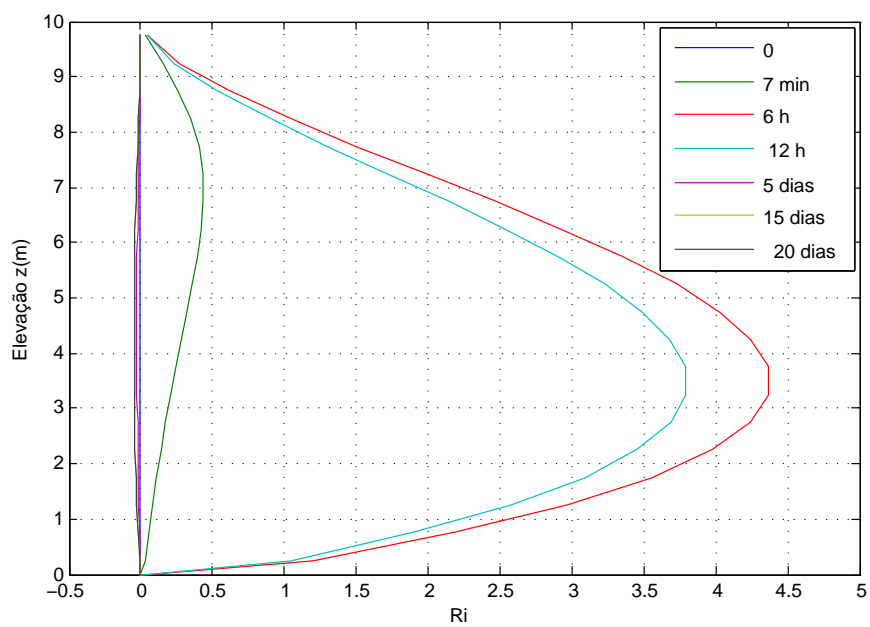


Figura 27: Número de Richardson – Teste 4

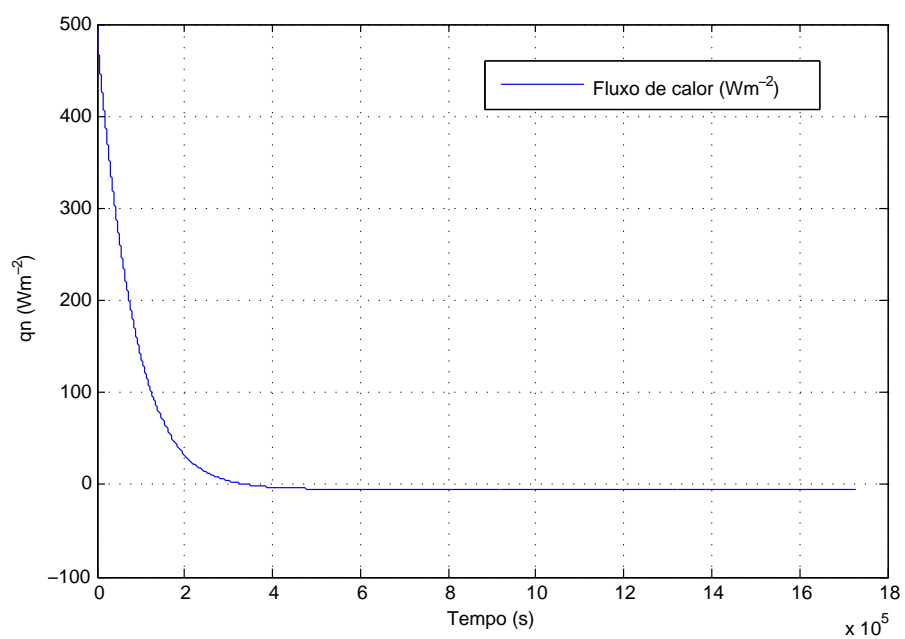


Figura 28: Fluxo de energia na Superfície – Teste 4

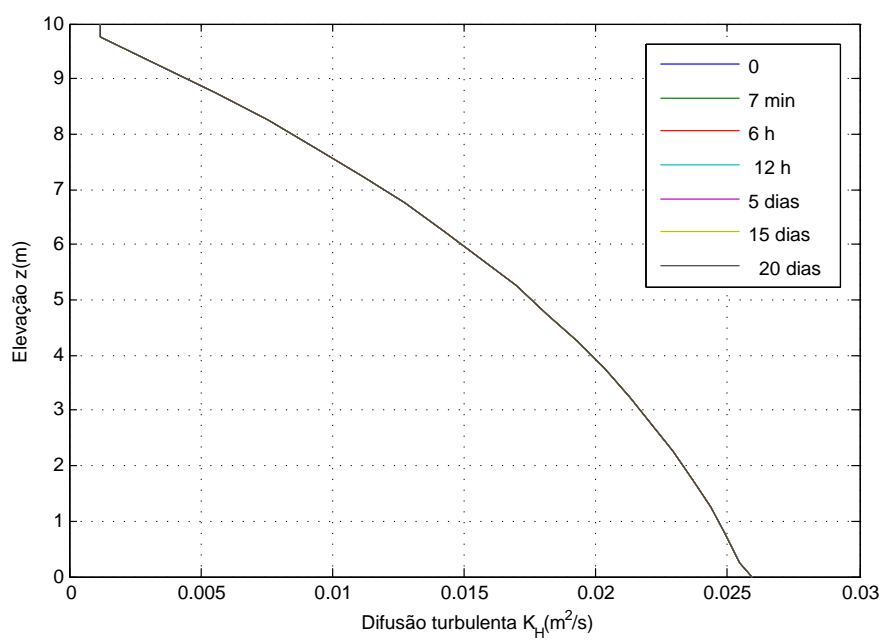


Figura 29: Coeficiente de difusão turbulenta – Teste 4

6.1.5 Teste 5

A tabela (1) apresenta os dados utilizados nos testes e condição inicial dada pelo gráfico (14).

Da mesma maneira que para o Teste 1, o lago perde energia para o ambiente e se resfria na superfície, conforme a Figura (30). No entanto, neste caso, a temperatura na qual o perfil volta a ser constante é menor, tendo em vista a menor quantidade de energia devido à absorção da radiação solar pela coluna d'água.

O coeficiente de difusão turbulento máximo estimado foi de $5,712 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ e $\Delta t = 21.882,4 \text{ s}$ ou, 6 h. O gráfico (31) apresenta o número de Richardson, comprovando a instabilização do perfil de temperatura. Não será apresentada a visualização gráfica da difusão turbulenta, tendo em vista que apenas na camada superior a difusão assumiu valor maior que a difusão molecular.

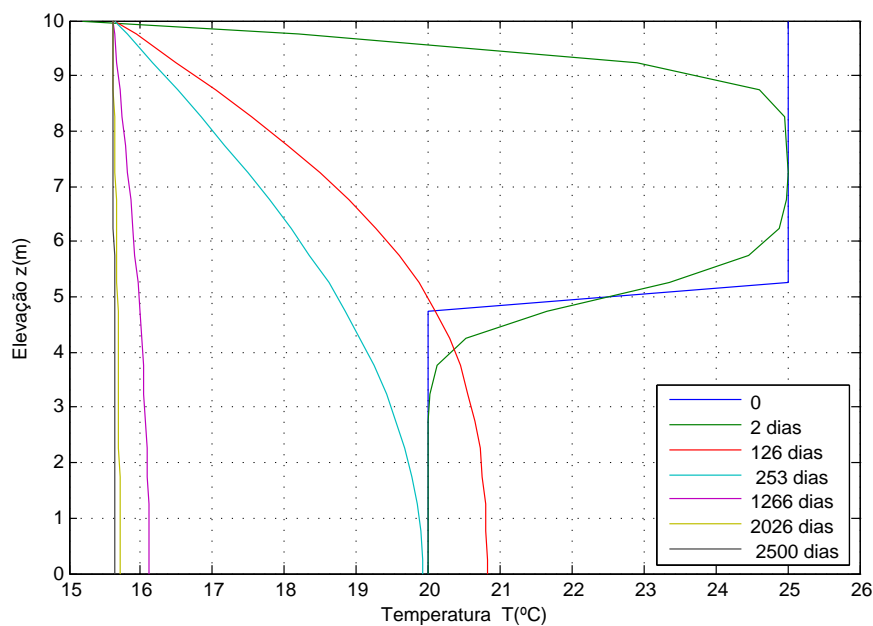


Figura 30: Perfis de Temperatura – Teste 5

6.1.6 Teste 6

Os dados referentes ao Teste 6 encontram-se na tabela (1), a condição inicial é dada pelo gráfico (14) e os perfis simulados representados no gráfico (32). Devido ao pequeno passo de

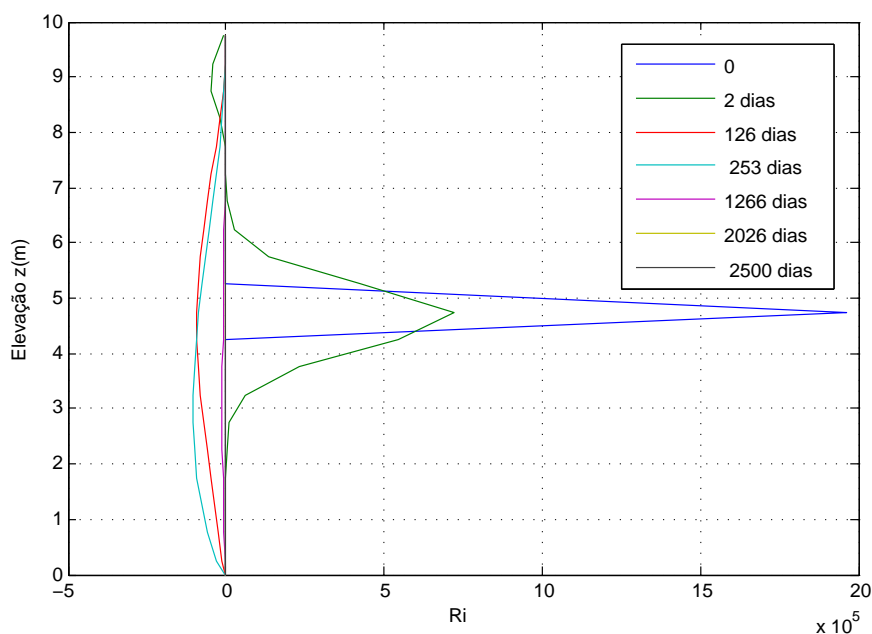


Figura 31: Número de Richardson – Teste 5

tempo usado ($\Delta t=4$ s) não foi possível realizar as simulações para um período maior que 20 dias. No entanto, observou-se que nesse período de tempo, o perfil de temperatura fica constante, atingindo temperatura de $15,23^{\circ}\text{C}$, próxima da temperatura de equilíbrio estimada ($15,229^{\circ}\text{C}$). A instabilidade do perfil de temperatura se deve a perda de energia na superfície, verificada pelo número de Richardson no gráfico (33).

Em relação ao Teste 2, do qual só houve variação de quantidade de radiação solar recebida pelo lago, constata-se que para o mesmo período de tempo simulado, mesmas condições meteorológicas e iniciais, a variação de temperatura no final dos 20 dias de simulação foi de aproximadamente $1,56^{\circ}\text{C}$. Além disso, os valores estimados de difusividade turbulenta são iguais aos representados no Teste 2 (gráfico (22)), devido à mesma condição inicial e velocidade do vento.

6.1.7 Teste 7

Os dados referentes ao Teste 7 encontram-se na tabela (1), a condição inicial é dada pelo gráfico (15) e os perfis simulados representados no gráfico (34).

Neste caso, ocorre aquecimento da coluna d'água e a estabilidade é mantida (conforme o

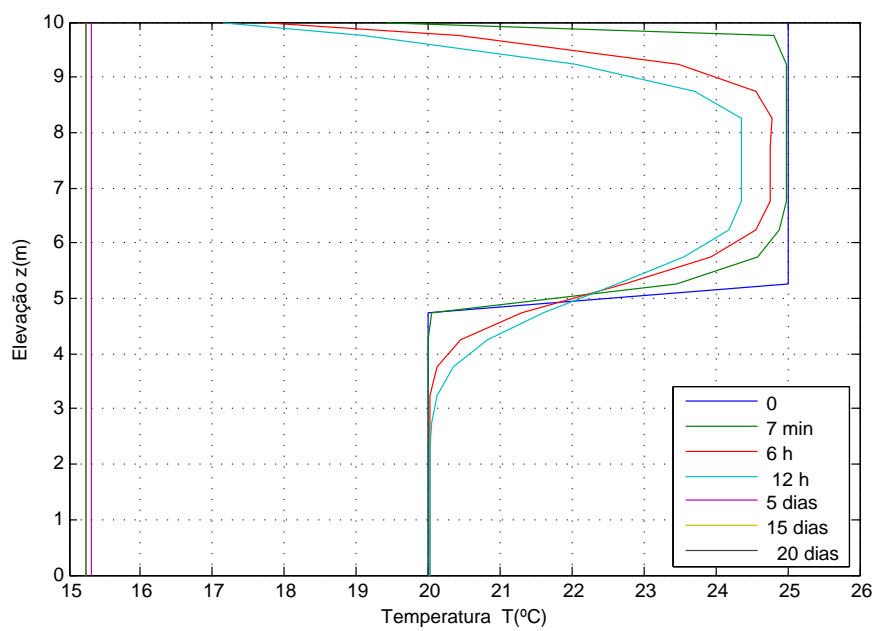


Figura 32: Perfis de Temperatura – Teste 6

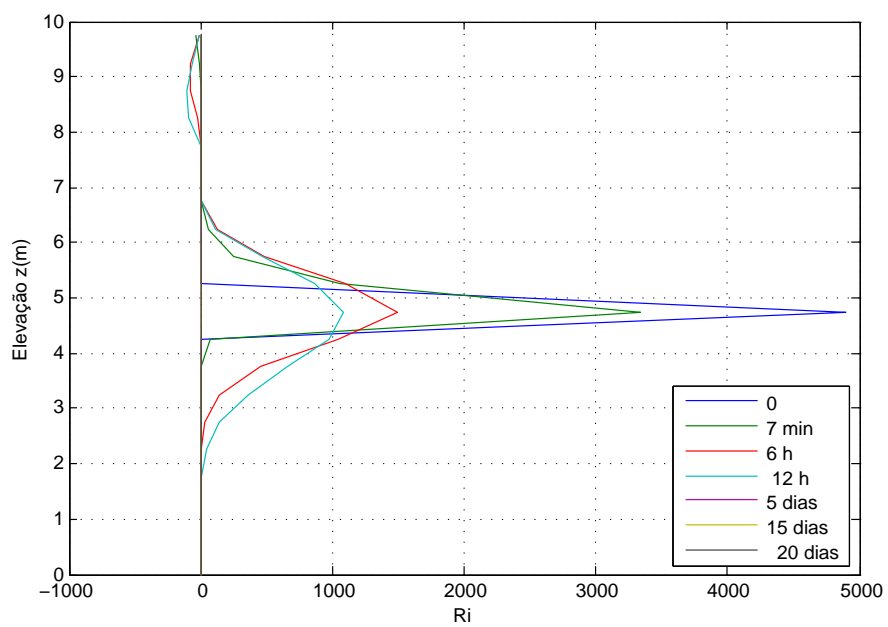


Figura 33: Número de Richardson – Teste 6

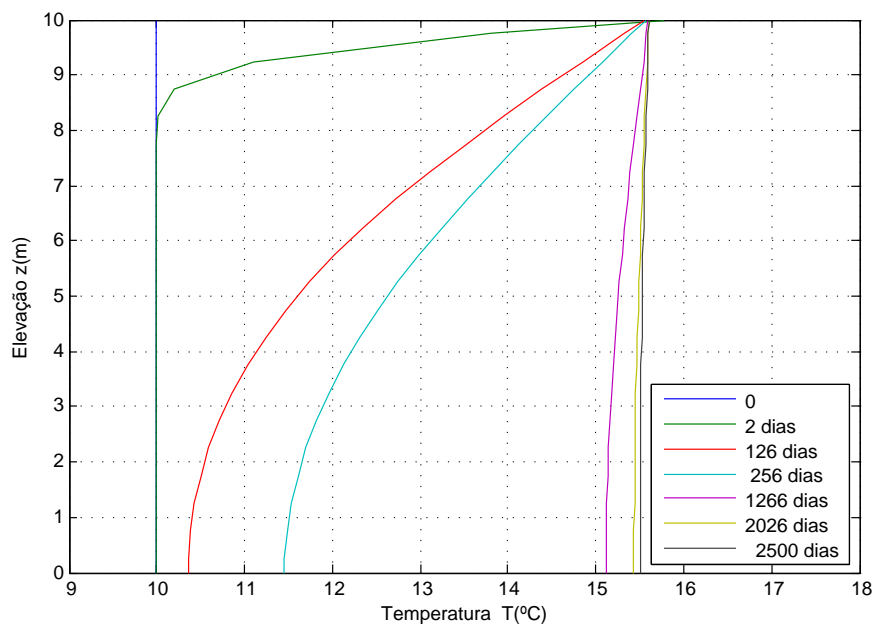


Figura 34: Perfis de Temperatura – Teste 7

gráfico (35). No entanto, para que um perfil constante fosse atingido foram necessários 2500 dias de simulação, no qual o Δt foi estimado em 6 h. Não será apresentada a visualização gráfica da difusão turbulenta, tendo em vista que apenas na camada superior a difusão assumiu valor maior que a difusão molecular.

Esta situação é similar ao Teste 3, diferindo pela quantidade de radiação solar recebida pelo lago. A variação de temperatura entre os dois testes, no final do período de simulação foi de aproximadamente 6°C.

6.1.8 Teste 8

Os dados referentes ao Teste 8 encontram-se na tabela (1), a condição inicial é dada pelo gráfico (15) e os perfis simulados representados no gráfico (36).

O perfil constante de temperatura é atingido em 20 dias, devido à intensa ação do vento. O lago recebe energia devido ao fluxo na superfície e ao final do período de simulação a temperatura da camada é de aproximadamente 15,23°C (a temperatura de equilíbrio foi estimada em 15,229°C). No final do período de simulação, o fluxo de energia se dá para o ambiente, portanto,

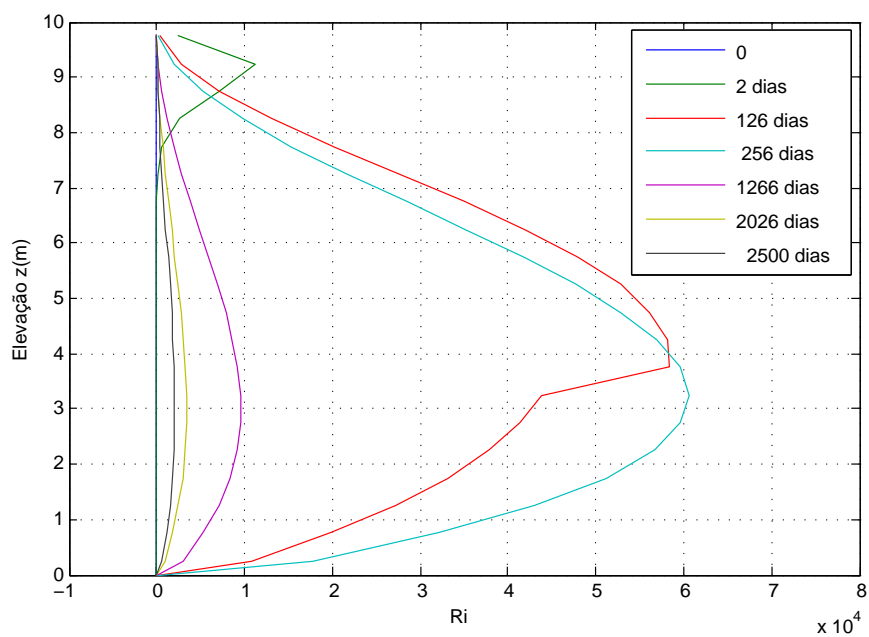


Figura 35: Número de Richardson – Teste 7

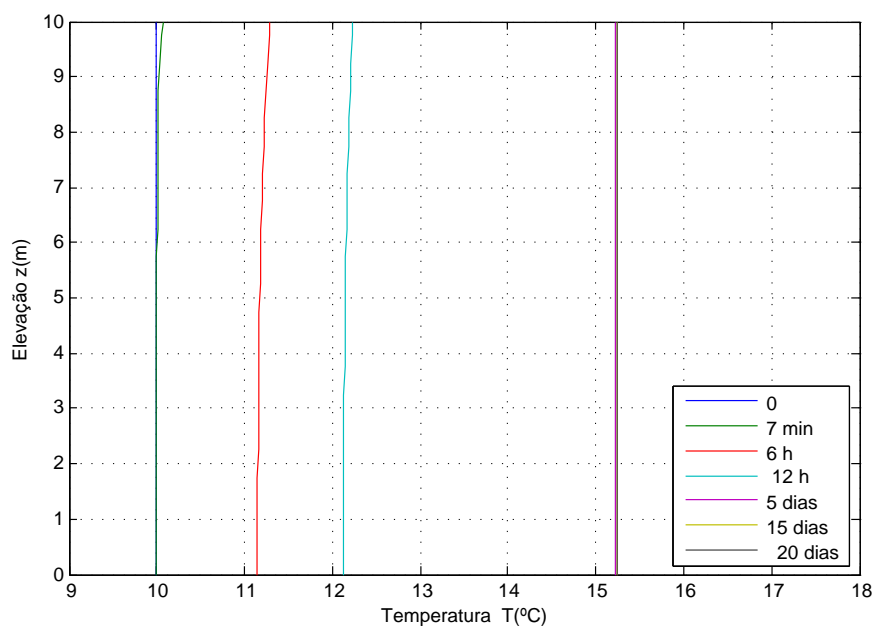


Figura 36: Perfis de Temperatura – Teste 8

o número de Richardson (gráfico (37)) apresenta uma instabilidade devido à queda de temperatura na camada superficial (a diferença de temperatura entre a camada superficial e o fundo é de $-0,00012066\text{ }^{\circ}\text{C}$).

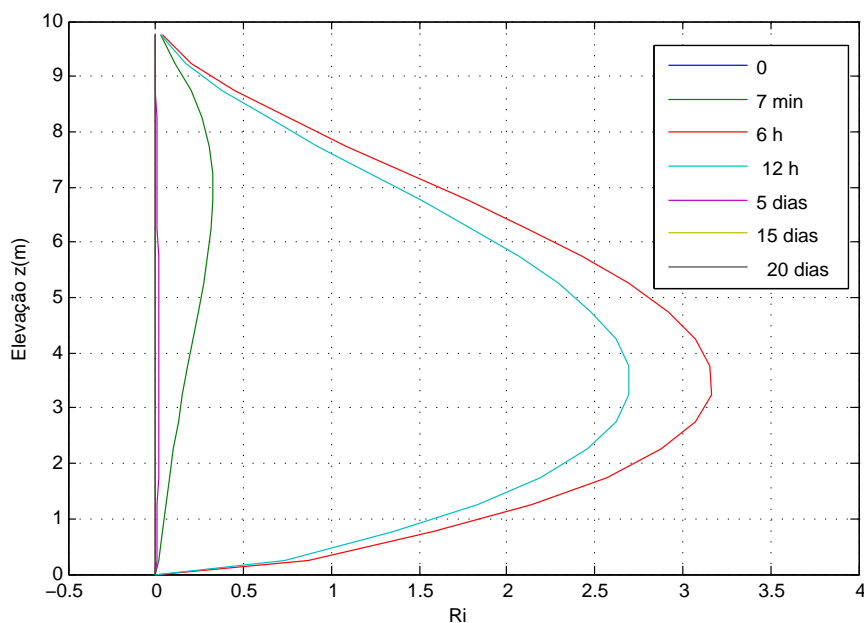


Figura 37: Número de Richardson – Teste 8

Esta situação é semelhante à do Teste 4, no qual apenas a radiação solar é alterada. A diferença de temperatura no final dos dois testes é de aproximadamente $1,56^{\circ}\text{C}$. A difusão turbulenta estimada do Teste 8 é idêntica à do Teste 4, devido à condição inicial e velocidade do vento.

7 Estudo de Caso

O estudo de caso proposto neste trabalho teve como base os dados do Reservatório do Rio Verde, que está localizado em Campo Magro - PR (25°31'30"S, 49°31'30"W). O reservatório tem área de 7,9 km², profundidade máxima de 11 m e profundidade média de 5,6 m (CUNHA, *et. al.*, 2011).

Os dados meteorológicos e de temperatura da coluna d'água disponíveis têm intervalo de 15 min. Para as simulações que necessitavam de intervalos de tempo menores, os dados meteorológicos foram repetidos. A condição inicial foi obtida por meio de interpolação linear dos dados disponíveis.

Nas próximas seções, o símbolo U_m representará a velocidade média do vento, T_{am} a temperatura média do ar, UR_m a umidade relativa média, qs_m a radiação solar média, σ representará o desvio padrão e T_m será utilizado para representar a temperatura média da água em determinada profundidade. Nesta etapa foram considerados $\beta=0,4$, $\eta=0,1$ e $a_s=0,07$.

7.1 Estudo de Caso: Simulação 1

A primeira simulação foi realizada com dados do período de 1 a 15/10/2009. Os dados meteorológicos deste período estão representados na Figura (38). Para este conjunto de dados, a velocidade máxima do vento é de 7,04 m/s. Foi considerado um $\Delta z= 0,4$ m. Desta maneira, atendendo ao critério de estabilidade, o Δt foi estimado em 7,5 s.

A Figura (39) apresenta alguns perfis de temperatura calculados. Inicialmente, o perfil de temperatura é não estratificado. Em alguns períodos há estratificação devido ao aumento da temperatura superficial. A Figura (40) apresenta o coeficiente de difusão turbulento para os perfis simulados. Devido à estratificação da camada superficial (para 36 horas e no 11º dia), a estimativa do coeficiente de difusão turbulento para a coluna d'água resultou em valores menores que a difusão molecular, portanto esta foi assumida pelo modelo.

A Figura (41) apresenta o fluxo de energia na superfície do reservatório. Inicialmente, ocorre a máxima perda de energia do reservatório para o ambiente devido a diferença entre a temperatura superficial e a temperatura de equilíbrio calculada ($T_e = 8,91$ °C). Outra perda significativa de energia é verificada após o 12º dia de simulação (a temperatura superficial estimada em apro-

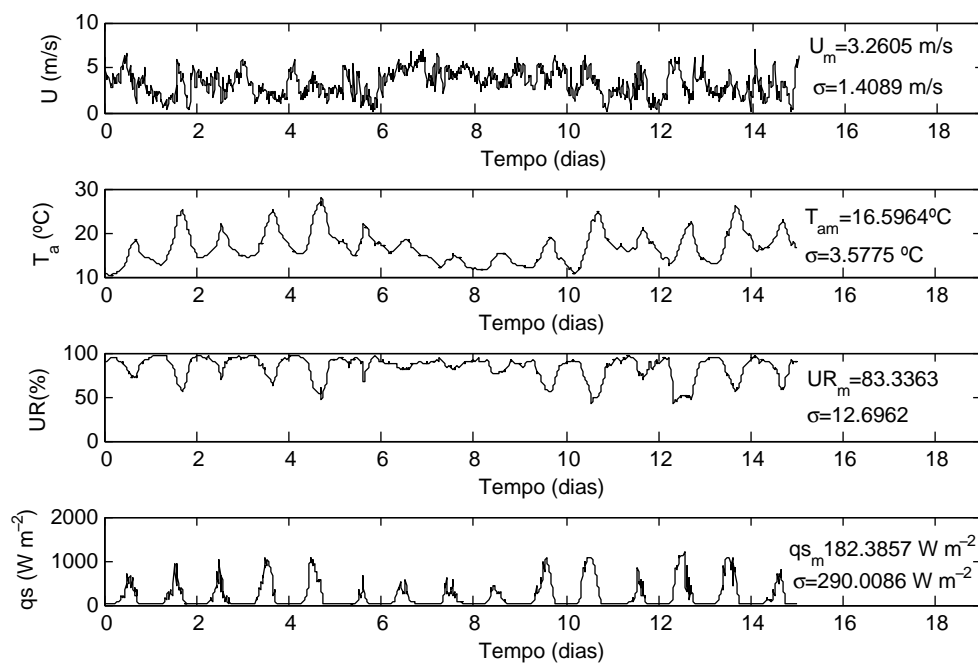


Figura 38: Dados meteorológicos - Simulação 1

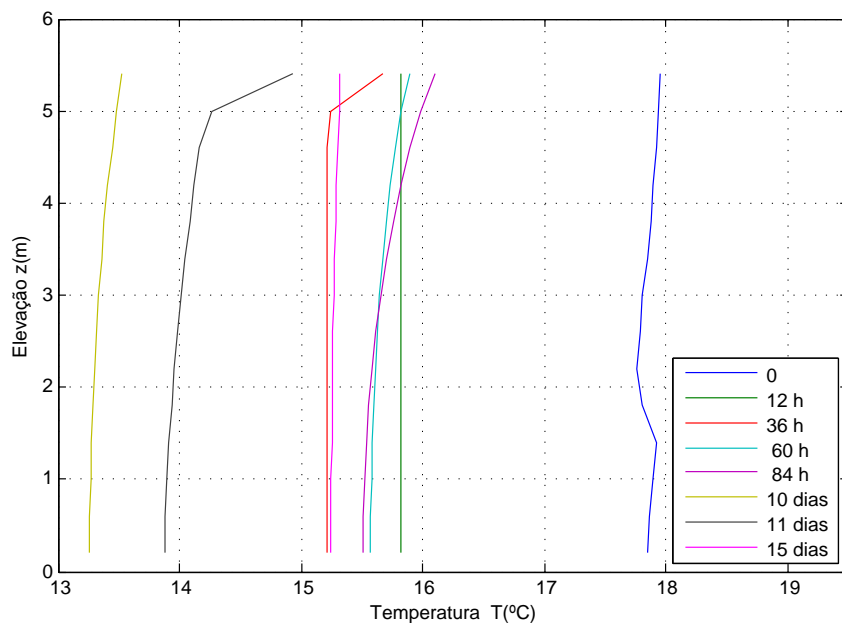


Figura 39: Estudo de Caso: Simulação 1 - Perfis de temperatura

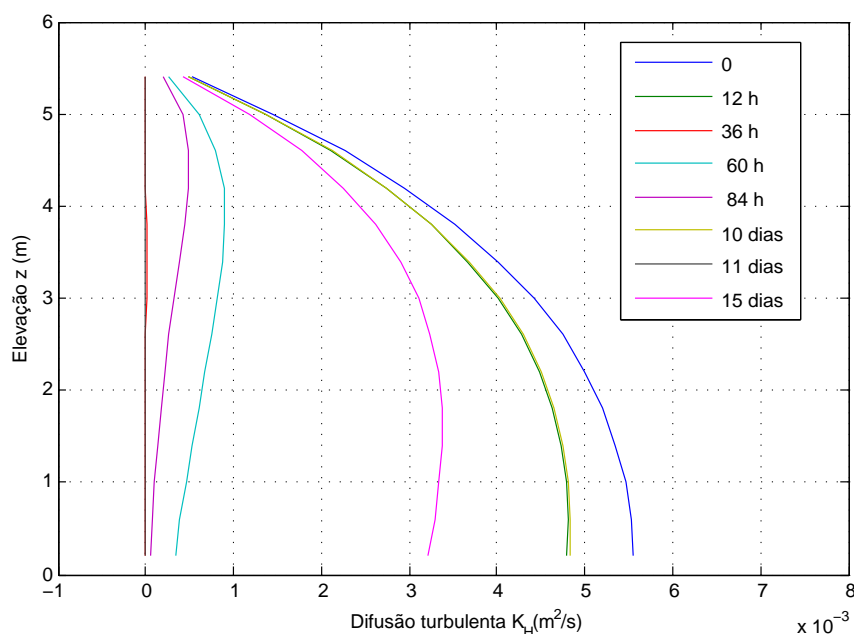


Figura 40: Estudo de Caso: Simulação 1 - Coeficiente de Difusão Turbulento

ximadamente $14\text{ }^{\circ}\text{C}$ e a temperatura de equilíbrio em $5,85\text{ }^{\circ}\text{C}$).

Observa-se que o fluxo de energia na superfície é representativo se comparado com os dados meteorológicos - entre o 5º e 9º dia, a radiação solar tem pico menor que nos outros dias considerados, isto é evidente também na Figura (41) - em que o fluxo de energia diminui.

Considerando o lago um volume de controle, a única entrada e saída é observada na superfície, devido ao fluxo energético e que, nesta simulação foi de ganho de energia no reservatório. Conforme descrito anteriormente, as margens e o fundo não contribuem, neste caso.

A Figura (42) apresenta o número de Richardson para os perfis de temperatura simulados e mostrados na Figura (39). O número de Richardson representou adequadamente tanto os perfis estáveis quanto o perfil inicial, que apresentou uma instabilidade térmica.

As Figuras (43) e (44) apresentam as temperaturas simuladas e medidas ao longo do tempo para determinada profundidade (indicada no gráfico). Todas as temperaturas são subestimadas pelo modelo. É importante notar que, apesar de subestimar as temperaturas, o modelo reproduz aumentos e quedas de temperaturas (comparativamente com os dados medidos).

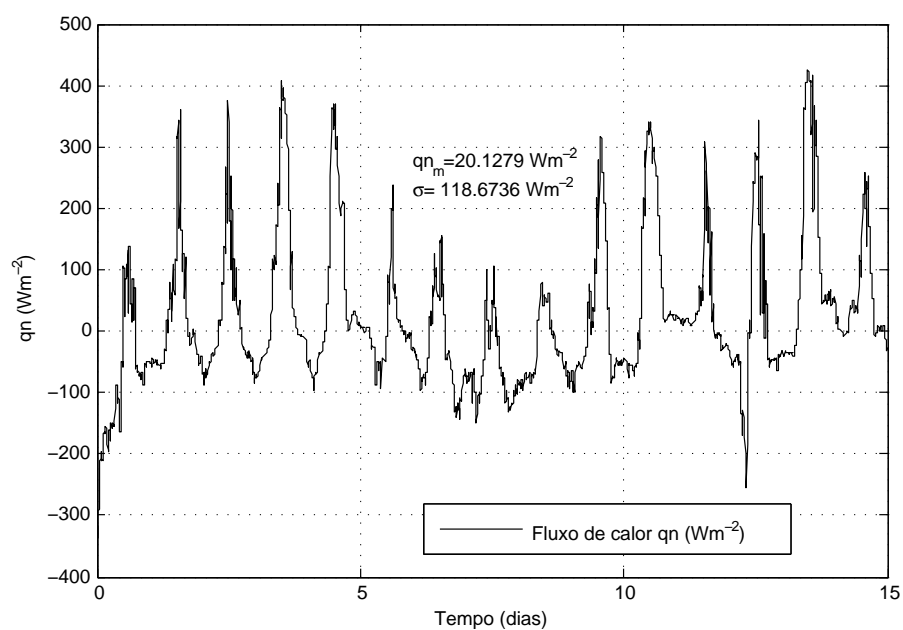


Figura 41: Estudo de Caso: Simulação 1 - Fluxo de Energia na Superfície

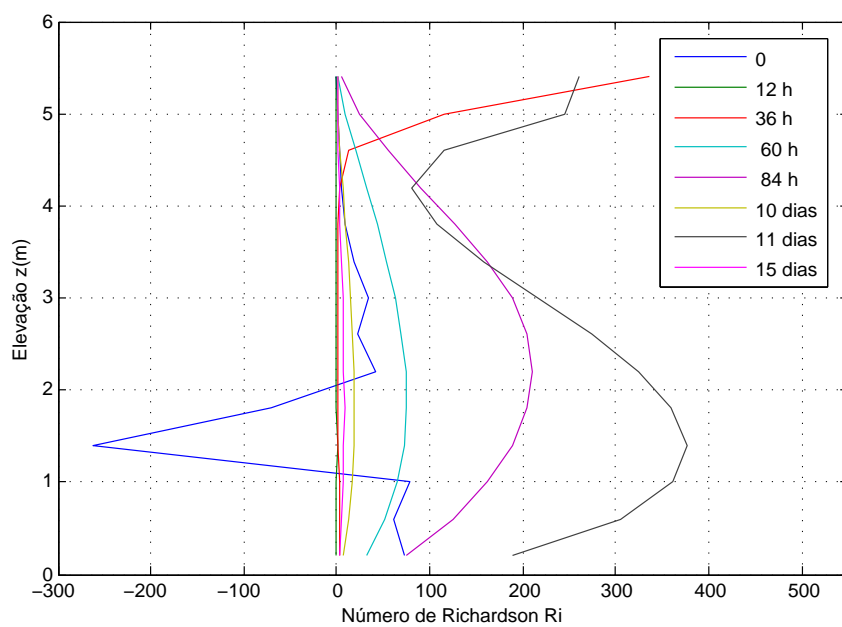


Figura 42: Estudo de Caso: Simulação 1 - Número de Richardson

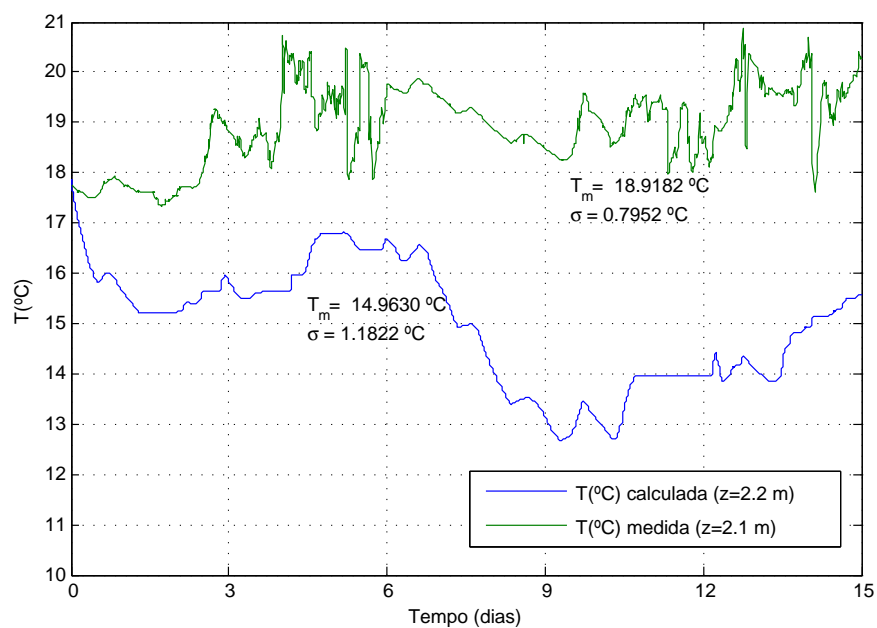


Figura 43: Estudo de Caso: Simulação 1 - Dados medidos e simulados

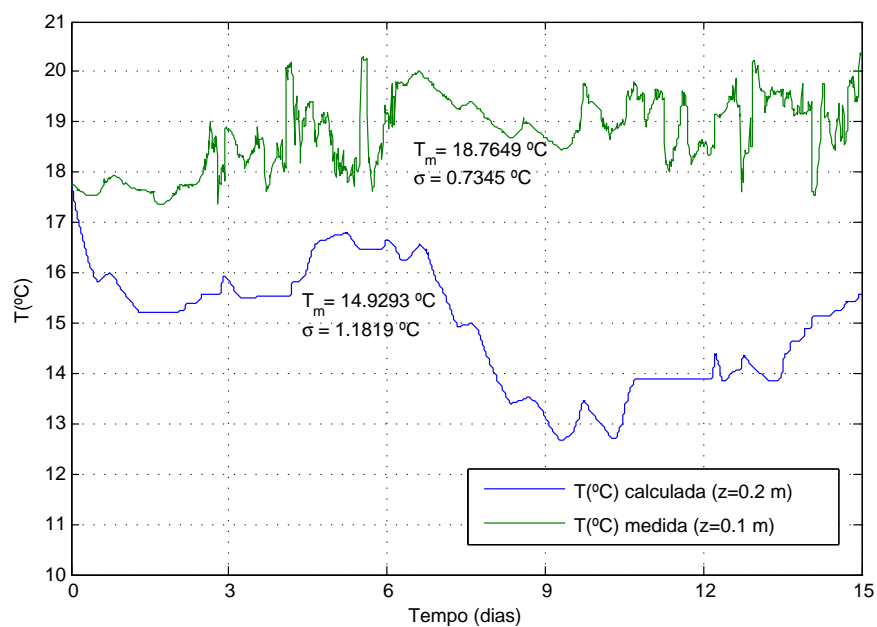


Figura 44: Estudo de Caso: Simulação 1 - Dados medidos e simulados

7.2 Estudo de Caso: Simulação 2

A segunda simulação foi realizada com dados do período de 13 a 17/12/2009. Os dados meteorológicos deste período estão representados na Figura (45).

Para este conjunto de dados, a velocidade máxima do vento é de 6,051 m/s. Foi considerado um $\Delta z = 0,2$ m. Desta maneira, atendendo ao critério de estabilidade, o Δt foi estimado em 2,5 s.

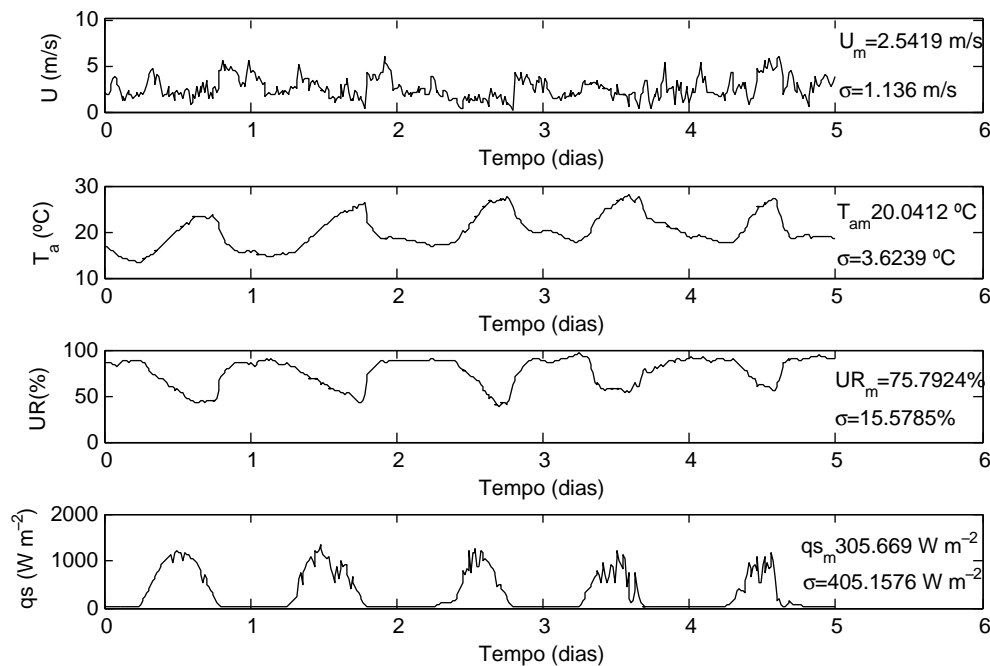


Figura 45: Dados meteorológicos - Simulação 2

A Figura (46) apresenta alguns perfis de temperatura calculados. Verifica-se uma queda acentuada da temperatura até o período de 60 horas e aumento da temperatura após esse período. Inicialmente o perfil de temperatura é estratificado e se mantém estratificado durante os períodos 12, 60 e 108 horas. Nos outros períodos a coluna não está estratificada. A figura (47) apresenta o coeficiente de difusão turbulento estimado, na qual observa-se que para os perfis estratificados a difusão foi assumida como a difusão molecular (com exceção da difusão na superfície no tempo 0).

A Figura (48) apresenta o fluxo de energia na superfície do reservatório. A queda acentuada da temperatura pode ser explicada pela grande perda de energia pela superfície durante o primeiro

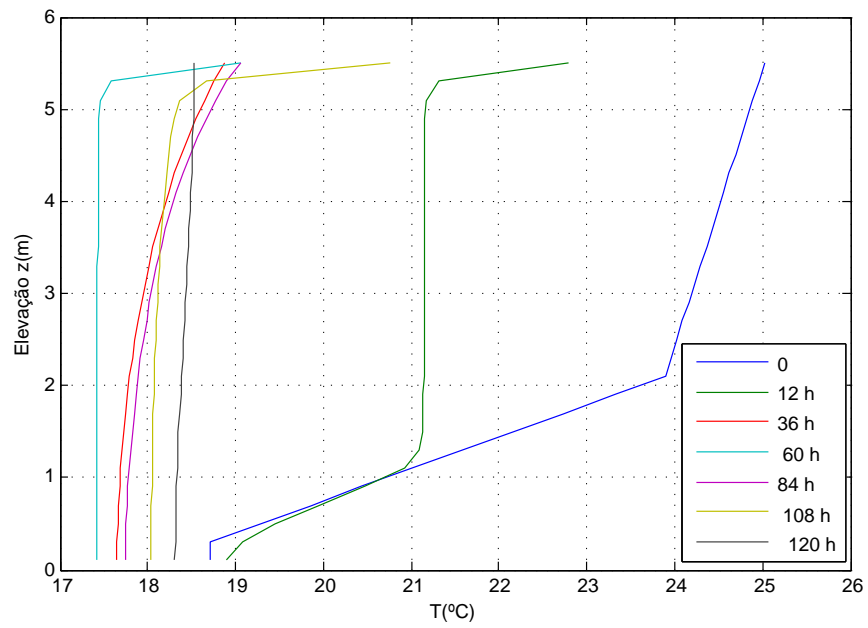


Figura 46: Estudo de Caso: Simulação 2 - Perfis de temperatura

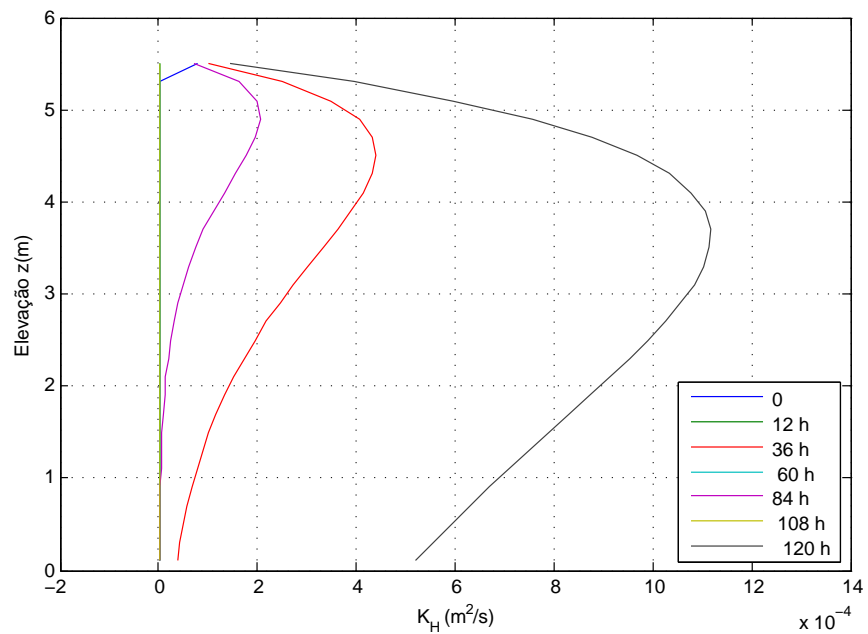


Figura 47: Estudo de Caso: Simulação 2 - Coeficiente de Difusão Turbulento

e segundo dias de simulação, já que essa perda de energia não é verificada novamente no período simulado. Considerando o reservatório um volume de controle, durante o período estudado, o fluxo de energia líquido foi positivo para o reservatório.

Nos tempos 60 e 108 horas a estratificação da coluna d'água ocorre devido ao fluxo de energia da superfície – do ambiente para o reservatório (Figura (48)), a qual é verificada pelo aumento da temperatura na camada superficial. É possível, além disso, verificar a influência das condições meteorológicas, por exemplo, no perfil de temperatura da coluna d'água em 12 horas. Neste período há transferência de energia do ambiente para o reservatório, devido à incidência de radiação solar, associada a velocidades de vento baixas.

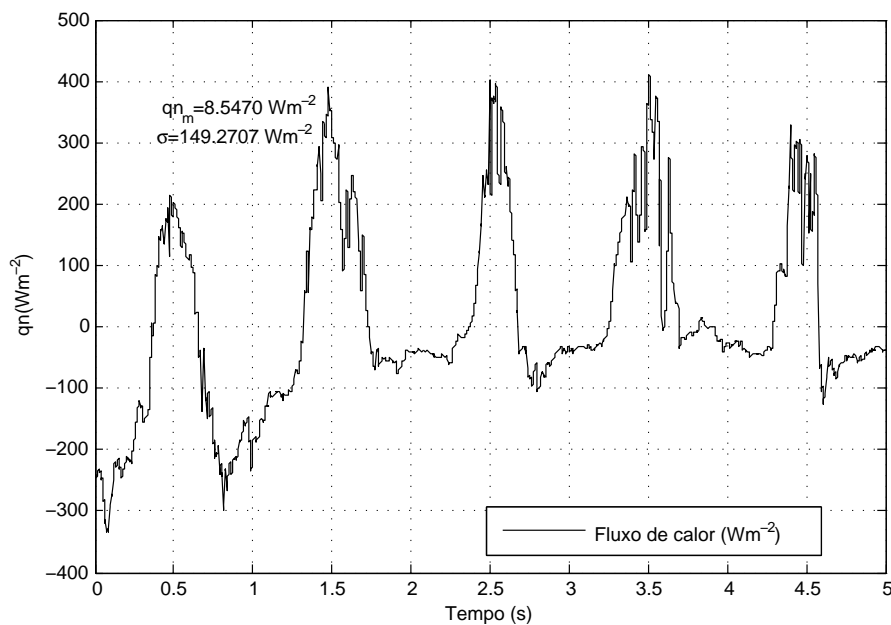


Figura 48: Estudo de Caso: Simulação 2 - Fluxo de Energia na Superfície

A Figura (49) apresenta o número de Richardson para a simulação 2. Observa-se que o número de Richardson representa adequadamente os dados simulados – nos perfis estratificados o número de Richardson é alto, representando, portanto, a estabilidade da camada.

As Figuras (50) e (51) apresentam as temperaturas simuladas e medidas ao longo do tempo para determinada profundidade (indicada no gráfico).

Na figura (50) é verificada a queda rápida da temperatura inicialmente (causada pela perda de energia na superfície, conforme explicado anteriormente). Nos períodos de aumento de radiação

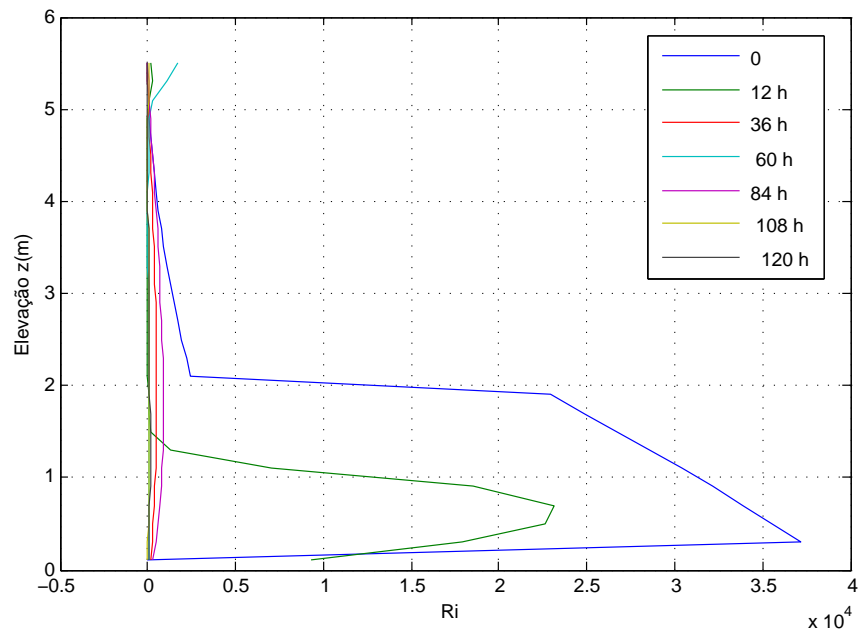


Figura 49: Estudo de Caso: Simulação 2 - Número de Richardson

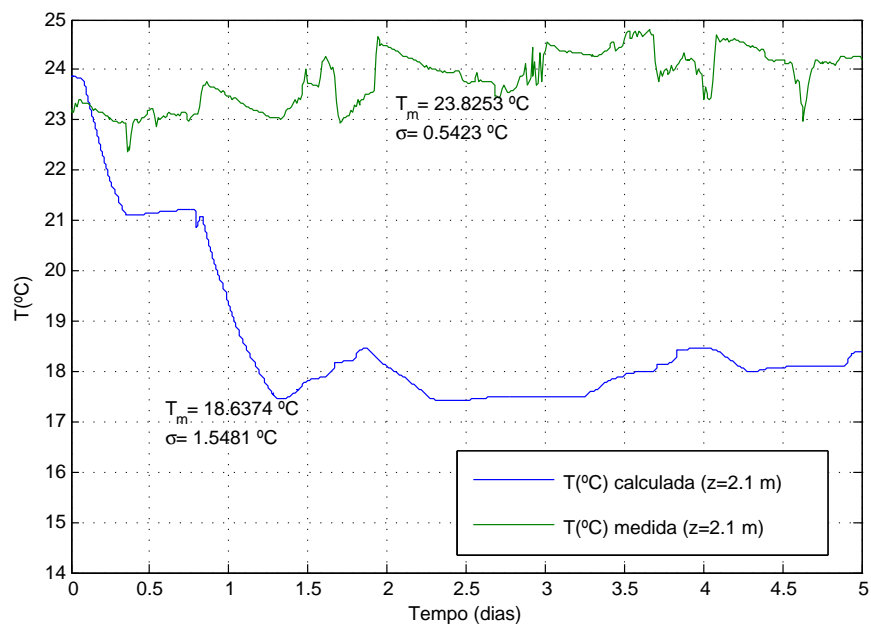


Figura 50: Estudo de Caso: Simulação 2 - Dados medidos e simulados

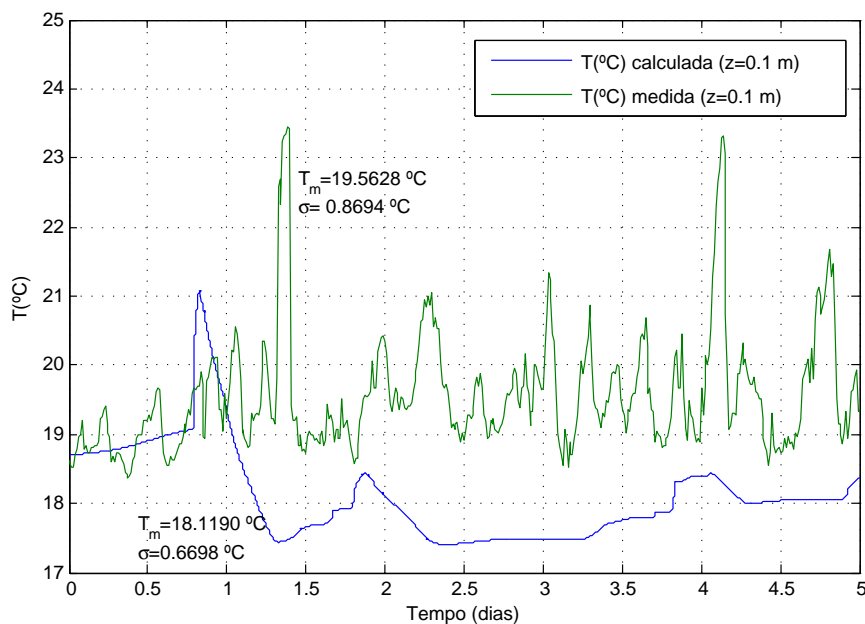


Figura 51: Estudo de Caso: Simulação 2 - Dados medidos e simulados

(figura(45)) observa-se que o modelo responde ao aumento de energia recebida na superfície, mas as temperaturas em todos os casos são subestimadas.

Devido a estratificação térmica, inicialmente o fundo não sofre a influência dos processos que acontecem na superfície, conforme a Figura (51). Observa-se que no primeiro dia há aumento da temperatura seguida de uma queda na temperatura (neste período não há mais estratificação térmica). Após este período, as temperaturas são subestimadas novamente. No entanto, essa simulação foi a que melhor aproximou a média de temperatura medida e simulada.

8 Conclusões

Com relação aos testes para verificação da resposta do modelo ao vento e à radiação solar observou-se que o modelo é mais sensível às variações na velocidade do vento. A estabilização do perfil de temperatura, nestes casos, aconteceu em um período de vinte dias (para velocidade de vento alta) – tanto para perfil inicial constante e estratificado. Com velocidade de vento baixa este critério foi atendido em diferentes intervalos de tempo para os perfis iniciais – de duzentos a dois mil e quinhentos dias para perfil estratificado e até dois mil e quinhentos dias para perfil constante. À medida que a influência do vento era diminuída, os perfis de temperatura demoraram a atingir um estado no qual a diferença entre a temperatura superficial e do fundo fosse pequena.

A velocidade do vento influenciou de maneira significativa o fluxo de energia na superfície – foram observados os maiores fluxos (em valor absoluto) para velocidades altas. Com relação à radiação, o fluxo de energia para o ambiente aumentou, em módulo, quando se simulou episódios de pouca radiação incidente.

A temperatura na qual houve estabilização dos perfis de temperatura foi próximo à temperatura de equilíbrio e seu valor está relacionado à diferença no fluxo superficial de energia e à condição inicial.

O modelo de evolução térmica proposto neste estudo não conseguiu reproduzir em média a temperatura da coluna d'água. Em todas as simulações do estudo de caso (nas quais foi aplicada a estabilização do perfil de temperatura para condições instáveis) o modelo subestimou os valores medidos – devido à grande perda de energia no início da simulação. No entanto, em alguns casos, o modelo conseguiu reproduzir os aumentos e quedas da temperatura medida.

O número de Richardson teve grande influência sobre os valores de difusão nos perfis estratificados, o qual, em muitos casos, assumiu a difusão molecular, tendo em vista que os valores calculados pelo modelo foram menores que a difusão molecular.

Com relação à discretização do modelo, no qual foi calculado Δt com base na difusão turbulenta máxima para todo o período, recomenda-se calcular o intervalo de tempo para cada conjunto de dados meteorológicos, para obter Δt variável mas, que da mesma maneira garantirá a convergência da solução pelo método de diferenças finitas explícito – assim, não será necessária a utilização de Δt tão pequenos quanto os que foram utilizados nas simulações. Outras

recomendações, para a melhoria do modelo são: considerar a contribuição dos afluentes (que são importantes se o volume do afluente é grande em relação ao epilímnio) e as variações de nível do reservatório.

É importante a realização de testes considerando UR , T_a , além do albedo a_s , do coeficiente de extinção η e da proporção de radiação líquida de ondas curtas absorvida na superfície, β , para identificar qual a sensibilidade do modelo a este conjunto de variáveis.

Uma recomendação é o teste do modelo para intervalos maiores de tempo, para verificação da possível influência de perda de energia no início da simulação, que em todos os casos é a maior perda observada, para identificar qual a resposta do modelo neste caso.

9 Referências Bibliográficas

ANTONOPOULOS, V. Z., GIANNIOU, S.K. Simulation of Water Temperature and Dissolved Oxygen Distribution in Lake Vegoritis, Greece. *Ecological Modelling*, 160, pp. 39-53, 2003.

BABAJIMOPOULOS, C., PAPADOPOULOS, F. Mathematical Prediction of Thermal Stratification of Lake Ostrovo (Vegoritis), Greece. *Water Resources Research*. v.22(11), pp. 1590-1596. 1986.

BEDFORD, K. W., BABAJIMOPOULOS, C. Vertical Diffusivities in areally averaged models. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*. v.103 (EE1), pp.113-125. 1977.

CANCELLI, D. M. Um Modelo para a Evolução Térmica de Lagos Profundos. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná. 214p. Curitiba. 2006

CHAPRA, S. C. Surface water quality modeling. McGraw-Hill. Boston, 1997.

CHAPRA, S. C., CANALE, R.P. Métodos Numéricos para Engenharia. Mc Graw Hill. 5ª ed. São Paulo, 2008.

CUNHA, C. L. N.[*et. al.*]. Eutrofização em Reservatórios: Gestão Preventiva: Estudo Interdisciplinar na Bacia do Rio Verde, PR. Curitiba, Editora UFPR. 2011.

DAKE, J. M. K., HALERMAN, D. R. F. Thermal Stratification in Lakes: Analytical and Laboratory Studies. *Water Resources Research*. v.5(2). pp. 484-495. 1969.

DUARTE, H. F., DIAS, N. L., MAGGIOTTO, S. R. Assessing daytime downward longwave radiation estimates for clear and cloudy skies in Southern Brazil. *Agricultural and Forest Meteorology*. v. 139. pp. 171-181. 2006.

EDINGER, J.E., DUTTWEILER, D.W., GEYER, J.C., The Response of Water Temperatures to Meteorological Conditions. *Water Resources Research*. v.4 (5). pp. 1137-1143. 1968.

ESTEVES, F. A. Fundamentos de Limnologia. Interciência. 2ª ed. Rio de Janeiro. 1989.

FOFONOFF, N. P., MILLARD JR, R.C. Algorithms for computation of fundamental properties of seawater. UNESCO technical paper in marine science 44, UNESCO, 1983.

GIANNIOU, S. K., ANTONOPOULOS, V. Z. Evaporation and energy budget in Lake Vegoritis, Greece. *Journal of Hydrology*, n.345, pp.212-223. 2007.

GOBBI, M. F. *Introdução à Modelagem da Poluição Ambiental*. Apostila, 2005.

HENDERSON-SELLERS, B. Development and Application of U.S.E.D: A Hydroclimate Lake Stratification Model. *Ecological Modelling*, v.21, pp.233-246. 1984.

HENDERSON-SELLERS, B. New Formulation of eddy diffusion thermocline models. *Applied Mathematical Modelling*, v.9, pp.441-446. 1985.

HENDERSON-SELLERS, B. Calculating the Surface Energy Balance for Lake and Reservoir Modeling: A Review. *Reviews of Geophysics*, v.24(3), pp.625-649. 1986.

HENDERSON-SELLERS, B. *Engineering Limnology*. Pitman Publishing, Great Britain. 1984.

HONDZO, M., STEFAN, H. G. Lake Water Temperature Simulation Model. *Journal of Hydraulics Engineering*, v.119, n.11, pp. 1251-1273. 1993.

HORNE, A. J, GOLDMAN, C. R., *Limnology*. Mc Graw Hill. 2^a ed. United States of America. 1994.

HOSTETLER, S. W., BARTLEIN, P. J. Simulation of Lake Evaporation With Application to Modeling Lake Level Variations of Harney-Malheur Lake, Oregon. *Water Resources Research*, v.26(10), pp.2603-2612. 1990.

IMBODEN, D. M., WÜEST, A. Mixing mechanisms in lakes. In: LERMAN, A., IMBODEN, D. M., GAT, J. R. (Eds.) *Physics and Chemistry of Lakes*, pp. 83-138. Berlin: Springer-Verlag. 1995.

JIRKA, G.H., DONEKER, R.L. and HINTON, S.W., "User's Manual for CORMIX: A Hydrodynamic Mixing Zone Model and Decision Support System for Pollutant Discharges into Surface Waters", Tech. Rep., DeFrees Hydraulics Laboratory, Cornell University (also published by U.S. Environmental Protection Agency, Tech. Rep., Environmental Research Lab, Athens, Georgia). 1996.

MCCORMICK, M. J., SCAVIA, D. Calculation of Vertical Profiles of Lake-Averaged Temperature and Diffusivity in Lakes Ontario and Washington. *Water Resources Research*, v.17(2),

pp.305-310. 1981.

MOMII, K., ITO, Y. Heat Budget estimates for Lake Ikeda, Japan. *Journal of Hydraulics Division*. v.361, pp.362-370. 2008.

ORLOB, G. T., SELNA, L. G. Temperature Variations in Deep Reservoirs. *Journal of Hydraulics Division*. v.96, n.HY2, pp. 391-410. 1970.

STEFAN, H., FORD, D. E. Temperature Dynamics in Dimictic Lakes. *Journal of the Hydraulics Division*. v.101(1), pp. 97-114. 1975.

SUNDARAM, T. R., REHM, R. G. Formation and Maintenance of Thermoclines in Temperate Lakes. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. v.9(7), pp. 1322-1329. 1971.

SUNDARAM, T. R., REHM, R. G. The seasonal thermal structure of deep temperate lakes. *Tellus*. v.25(2), pp. 157-163. 1973.

STULL, R. B. *Meteorology for Scientists and Engineers*. 2 ed. Brooks/Cole. 2000.

WETZEL, R.G., *Limnology*. Saunders College Publishing. 2^a ed. United States of America. 1983.

WÜEST, A., LORKE, A. Small-Scale Turbulence and Mixing: Energy Fluxes in Stratified Lakes. In: Likens, G. E. (Editor) *Encyclopedia of Inland Water*. Vol.1, pp-628-635 Oxford: Elsevier. 2009.