Curitiba, 29.07.2013

Avaliação 2
Mecânica dos Fluidos Ambiental I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, DHS, Bloco V, Sala 9.22
Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ____

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos	Pontos totais	
1		20	
2		20	
3		20	
4		30	
5			
6			Nota
Soma		90	

Questões

1. (20 P) Um tubo (área a = A/3) injeta um liquido "a" num outro tubo (área A) com liquido "b" (Fig. 1). O liquido "a" injetado (densidade ρ_a , velocidade V_0) e o liquido "b" (densidade $\rho_b = 3\rho_a$, velocidade $V_0/3$) se juntam na secção 0. Na secção 1 os líquidos são completamente misturados e escoam com velocidade V_1. O escoamento pode ser considerado permanente, os líquidos incompressíveis e a pressão nas secções 0 e 1 constante. O atrito nas paredes das tubulações pode ser desconsiderado.
   a. Determine a equação que descreve a variação de pressão entre as secções 0 e 1

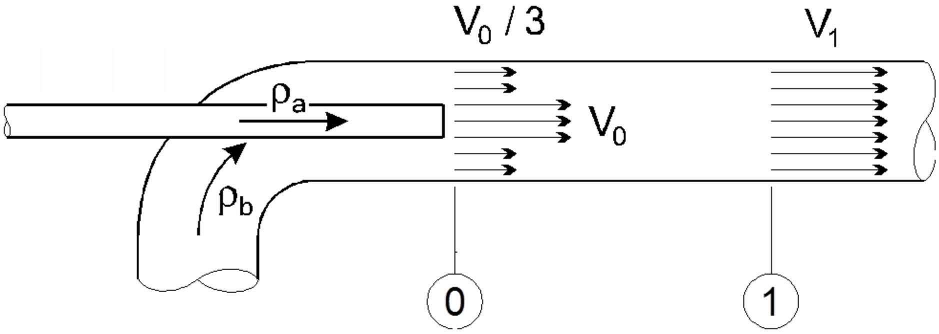


Fig. 1: Tubo misturador

Solução

$$\sum \vec{F} = \sum_{K.O.} \vec{V} \cdot (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{A})$$

$$\sum F_x = \sum_{K.O.} u \cdot (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{A})$$

Quantidade de movimente em x:

$$p_0 \cdot A - p_1 \cdot A = V_0 \cdot (-\rho_a \cdot V_0 \cdot a) + \frac{V_0}{3} \cdot (-\rho_b \cdot \frac{V_0}{3} \cdot (A - a)) + V_1 \cdot (\rho_1 \cdot V_1 \cdot A)$$

Conservação de massa:

$$\rho_1 \cdot V_1 \cdot A - \rho_a \cdot V_0 \cdot a - \rho_b \cdot \frac{V_0}{3} \cdot (A - a) = 0$$

$$(p_0 - P_1) \cdot A = V_0 \cdot (-\rho_a \cdot V_0 \cdot a) + \frac{V_0}{3} \cdot (-\rho_b \cdot \frac{V_0}{3} \cdot (A - a))$$

$$+V_1 \cdot (\rho_a \cdot V_0 \cdot a + \rho_b \cdot \frac{V_0}{3} \cdot (A - a))$$

$$= V_0 \cdot (-\rho_a \cdot V_0 \cdot \frac{A}{3}) + \frac{V_0}{3} \cdot (-3 \cdot \rho_a \cdot \frac{V_0}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot A)$$

$$+V_1 \cdot (\rho_a \cdot V_0 \cdot \frac{A}{3} + 3 \cdot \rho_a \cdot \frac{V_0}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot A)$$

$$p_0 - p_1 = \rho_a \cdot V_0 \cdot (-\frac{V_0}{3} - \frac{2}{9} \cdot V_0 + V_1 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}))$$

$$= \rho_a \cdot V_0 \cdot (V_1 - \frac{5}{9} \cdot V_0)$$

2. (20 P). Uma placa fina com peso G = 0,6 kN com comprimento L = 1m é pendurada num eixo D. Um jato de água horizontal com vazão Q = 5 ℓ/s e velocidade V_o = 15 m/s com área retangular atinge a placa numa distancia e = 0,8 m do eixo. Atrito na placa pode ser desconsiderado.

a. Calcule as vazões Q_1 e Q_2
b. Calcule o angulo de inclinação β da placa
c. Calcule a força resultante (magnitude e orientação) em D que é necessário para segurar a placa

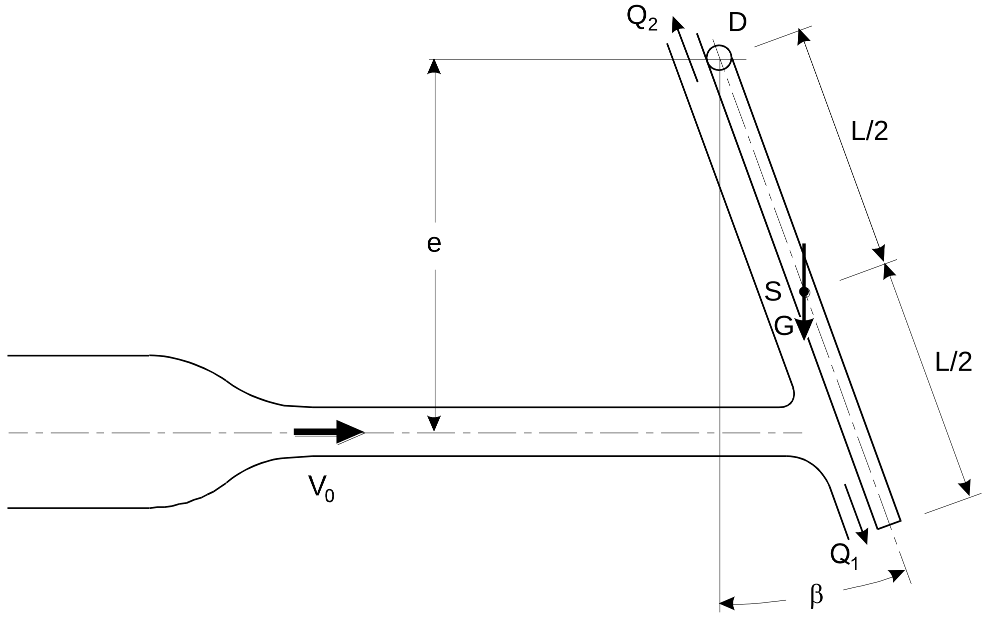
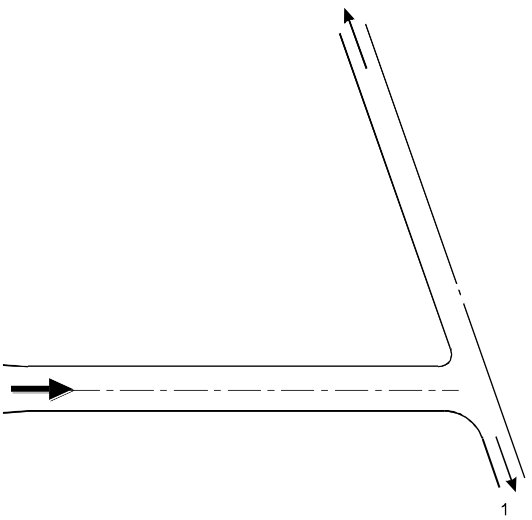


Fig. 2: Jato livre e placa no eixo

Solução

a) Considerando só volume de controle da água → Forcas paralelo a placa = 0 (sem atrito)



$\sum F_{\parallel} = - V_0 \sin\beta\, (-\rho\, Q) - V_1\, \rho\, Q_1 + V_2\, \rho\, Q_2 = 0$

$V_1 = V_2 = V_0$ (Bernoulli)

$Q = Q_1 + Q_2$ (continuidade)

$Q_1 = Q - Q_2$

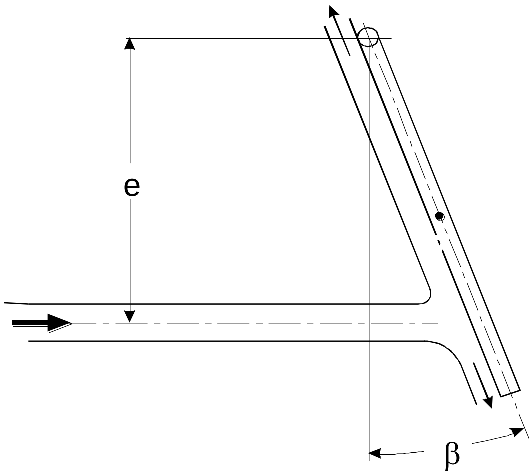
$\Rightarrow + \sin\beta\, Q - (Q - Q_2) + Q_2 = 0$

$(1 - \sin\beta)\, Q = 2\, Q_2$

$Q_2 = \dfrac{1-\sin\beta}{2}\, Q = 1{,}99\ \ell/s$ (com beta da parte b)

$Q_1 = Q - Q_2 = 3{,}01\ \ell/s$

b:



$$\sum M_D = -G\,\frac{L}{2}\,\sin\beta = V_0\,(-\rho Q)\cdot e$$

(momentos de $V_1\ \rho\ Q_1$,$V_2\ \rho\ Q_2$ podem ser desconsiderados)

$$\sin\beta = \frac{V_0\,\rho Q e}{G\,\frac{L}{2}}$$

$$\beta = \arcsin\frac{V_0\,\rho Q e}{G\,\frac{L}{2}} = 11{,}8°$$

c: considerando volume de controle com placa e incluindo eixo D

$\sum F_{\parallel} = F_{D\parallel}$ - G cos β = -V_0 sin β (-ρ Q) -V_1 ρ Q_1 + V_2 ρQ_2 = 0 (sem atrito, veja parte a)

$F_{D\parallel}$ = G cos β = 576,2 N (como se somente tivesse a placa)

$\sum F_{\perp} = F_{D\perp}$ - G sin β = V_0 cos β (-ρ Q)

$F_{D\perp}$ = G sin β - V_0 cos βρ Q = 46,95 N

$F_D = \sqrt{F^2_{D\parallel} + F^2_{D\perp}}$ = 578,07 N

$\alpha_D = \text{arctg}\,(F_{D\perp}/F_{D\parallel}) = 4{,}65^0$

3. (20 P). A Fig. 3 mostra quatro cenários para escoamentos permanentes, uniformes, laminares e viscosos entre duas placas paralelas com e sem gradiente de pressão e com e sem movimento constante das placas. A gravidade pode ser desconsiderada, as velocidades nas direções y e z são v = w = 0.
   a. Desenha qualitativamente as distribuições de velocidade na secção A da Fig. 3.
   b. Descreva a equação que poderia ser utilizado para calcular o perfil e determine a equação do perfil para o cenário d).
   c. Desenha qualitativamente as distribuições da tensão de cisalhamento na Fig. 3
   d. Descreva a equação que poderia ser utilizado para calcular o perfil das distribuições da tensão de cisalhamento (não requer calculo).

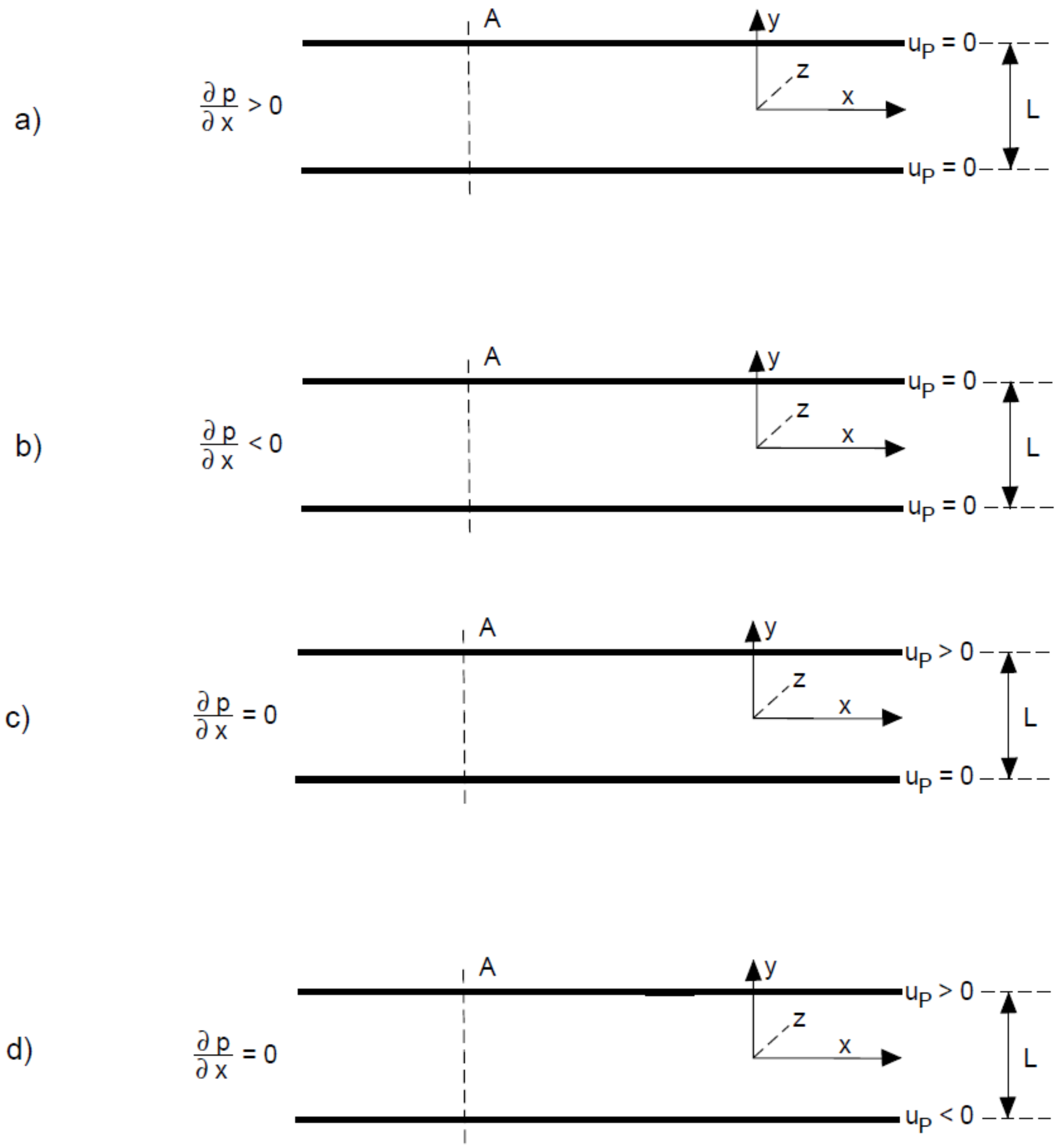
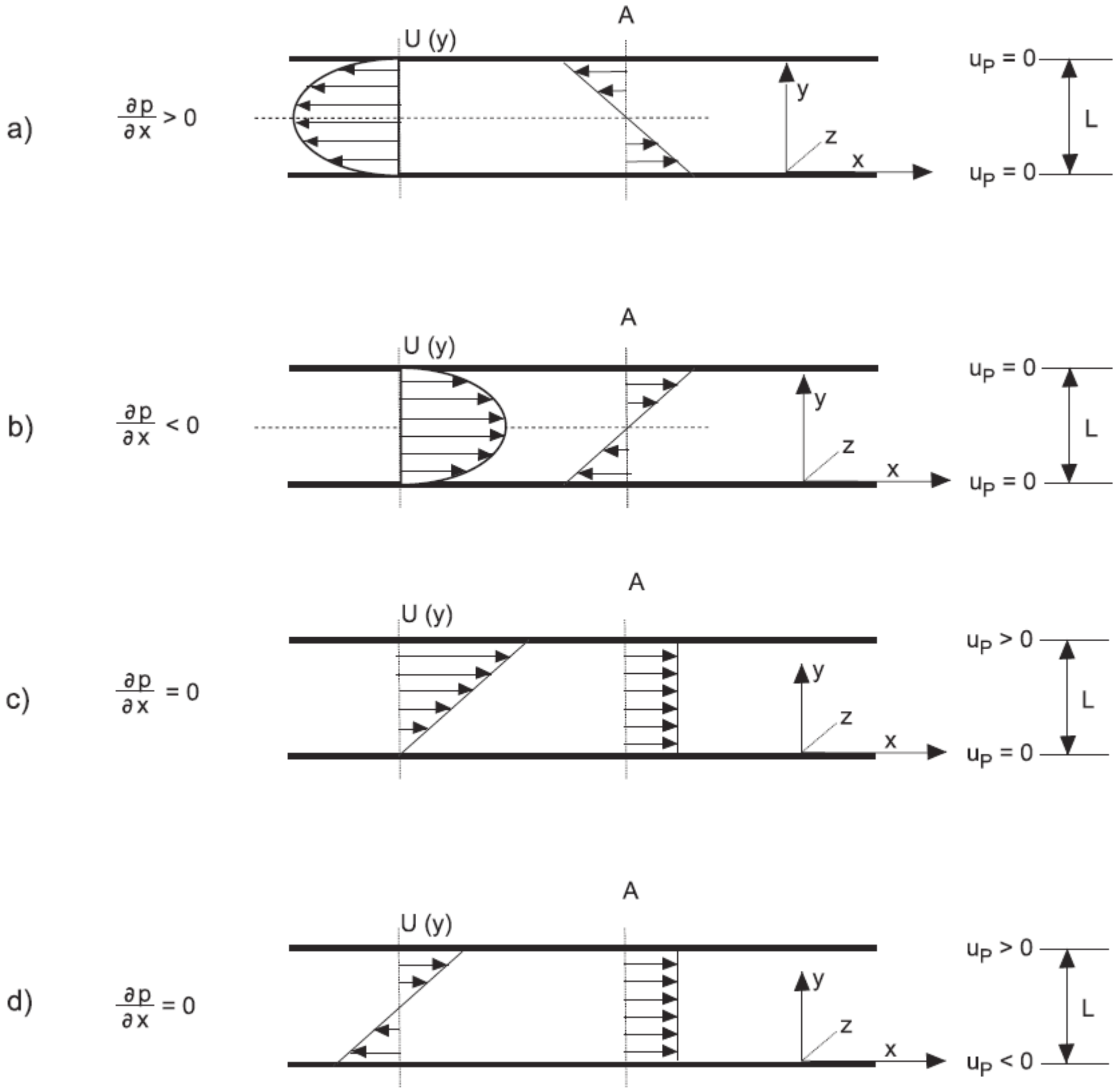


Fig. 3: Escoamento entre placas

<u>Solução</u>



Equação para caso d):
Navier Stokes em direcao x: só resta $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$
Integrando: $u(y) = c_1 y + c_2$
C.C.: $u(y = L/2) = u_p$ e $u(y = -L/2) = -u_p$
segue $c_1 = 2u_p/L$ e $c_2 = 0$
segue $u(y) = 2yu_p/L$

Equação para tensão: $\tau_{xy} = \mu \partial u(y)/\partial y$

4. (30 P) Uma tubulação (D_1 = 0,8m) de um reservatório chega na casa de força de uma hidrelétrica para alimentar uma turbina de jato livre (D_2 = 0,2m). O tubo com o bocal esta fixado no fundamento alguns metros antes do bocal. Na secção 1 foi colocado uma peca de amortecimento que não passa forcas nem momentos (veja Fig. 4). A pressão na secção é p_1 = 5,16 kPa e a vazão Q = 4 m³/s. O volume interno do tubo com bocal (da secção 1 a secção 2) é V = 15,3 m³. A distancia entre a secção 1 e a curva é L =20 m. O angulo da curva é $\alpha = 30°$. Todas as perdas de energia podem ser desconsideradas.
   a. Calcule a forca resultante F (magnitude e orientação) que atua na fixação.
   b. Desenha a linha de energia e a linha piezométrica esquematicamente na Fig. 4.

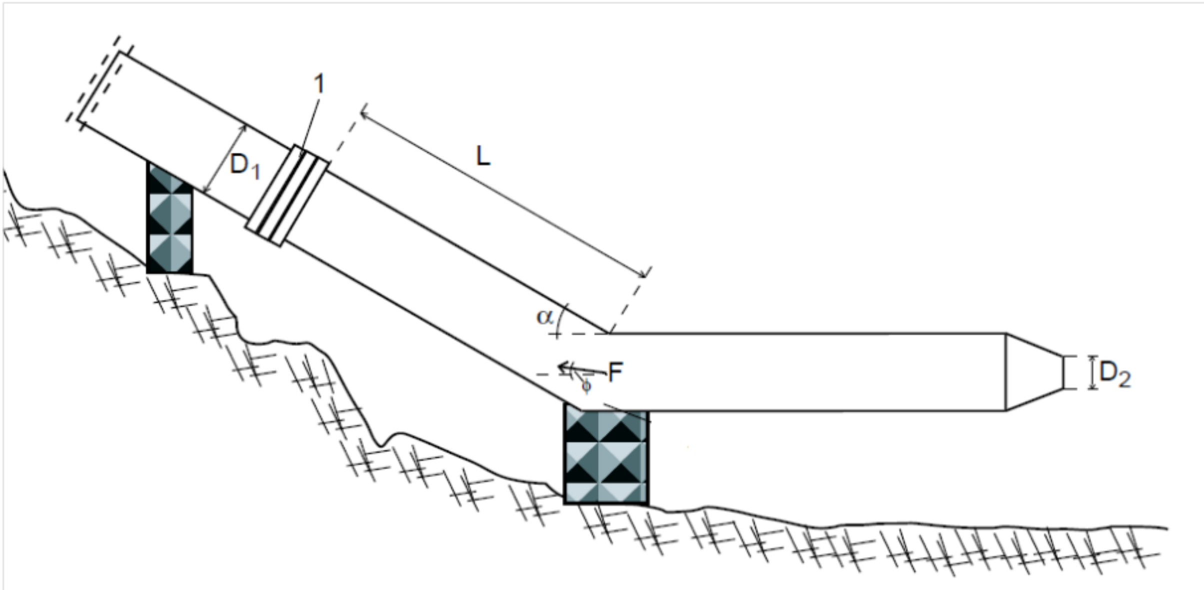


Fig. 4: Jato livre para turbina

Solução:

Velocidades em 1 e 2:

$$\frac{Q}{A_1} = V_1 = \frac{4\,\mathrm{m}^3}{s}\frac{1\cdot 4}{(0,8\,\mathrm{m})^2\cdot\pi} = 7,96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\frac{Q}{A_2} = V_2 = \ldots = 127,3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Componentes das velocidades:

$$V_{x1} = V_1\cos(\alpha) = 6,89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$V_{y1} = V_1\sin(\alpha) = -3,98\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \mathrm{mit} \quad \alpha = 30\,^\circ$$

Forcas da pressão:

$$\begin{aligned} F_{p1} &= p_1 A_1 \\ &= 5,16\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}\cdot 0,5\,\mathrm{m}^2 = 2.580\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

$$F_{p2} = p_2 A_2 = 0, \quad \text{da atmosphärische Druckverhältnisse}$$

Quantidade de movimento em x:

$$\sum F_H = 0 \Longleftrightarrow \tag{1}$$

$$F_{p1}\cos(30\,^\circ) + \rho Q V_{x1} + F_x = F_{p2} + \rho Q V_{x2} \tag{2}$$

$$F_x = \rho Q(V_{x2} - V_{x1}) - F_{p1}\cos(30\,^\circ) \tag{3}$$

$$= 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 4\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}(127,3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 6,89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) - 2580\,\mathrm{N}\cos(30\,^\circ) \quad = 479,1\,\mathrm{kN} \tag{4}$$

Quantidade de movimento em y:

$$\sum F_V = 0 \Longleftrightarrow \tag{5}$$
$$-F_{p1}\sin(30°) + \rho Q V_y + F_y - G = 0 \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

$$2580\,\mathrm{N}\sin(30°) - 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 4\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\cdot(-3,98\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$$
$$+ 15,3\,\mathrm{m}^3\cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = F_y \tag{8}$$
$$F_y = 167,3\,\mathrm{kN}$$

Forca resultante:

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$
$$= \sqrt{(479,1\,\mathrm{kN})^2 + (167,3\,\mathrm{kN})^2}$$
$$= 507,76\,\mathrm{kN}$$

$$tan(\phi) = \frac{F_y}{F_x} \Longrightarrow \phi = 19,23°$$

Equações dadas:

Conservação de massa de fluido:

Forma integral: $\int_{VC} \frac{\partial\rho}{\partial t} dV_c + \int_{SC} \rho \mathbf{V}\bullet d\mathbf{A}) = 0$

com VC: volume de controle, SC: superfície de controle, ρ: massa especifica, t: tempo, **V**: vetor velocidade, **A**: vetor área normal

Forma diferencial: $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0,$$

Conservação de massa de um soluto

Forma integral: $\int_{VC} \frac{\partial\rho C_A}{\partial t} dV_c + \int_{SC} C_A \rho \mathbf{V}\bullet d\mathbf{A} = - \int_{SC} \mathbf{j}\bullet d\mathbf{A}$

com **j**: fluxo de massa difusivo

Forma diferencial: $$\frac{\partial C_A}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,C_A = D_{AB}\nabla^2 C_A.$$

com D_{AB}: difusividade molecular

Conservação de quantidade de movimento

Forma integral de engenharia: $\int_{VC} \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} dV_c + \int_{SC} \mathbf{V}\rho\mathbf{V}\bullet d\mathbf{A}) = \Sigma\mathbf{F_b} + \Sigma\mathbf{F_s}$

com $\mathbf{F_b}$: vetor forca do corpo e $\mathbf{F_s}$: vetor forca superficial

Forma integral geral:
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \mathbf{v}\rho dV + \int_{S_c} \mathbf{v}\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS = \int_{V_c} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_c} \left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\right) dS.$$

com $\mathbf{T}$: tensor tensões e $\mathbf{n}$: vetor normal

Forma diferencial:
$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}\left(p + \rho g h\right) + \mu\nabla^2\mathbf{v}$$

Bernoulli: $z_1 + p_1/\gamma + v_1^2/(2g) = z_2 + p_2/\gamma + v_2^2/(2g) = \text{const.}$

Conservação de energia

Forma integral:
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} e\rho dV + \int_{S_c} e\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS = -\int_{S_c} \left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\right) dS + \int_{S_c} \left[\left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{n}\right] dS$$

Forma diferencial:
$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho\left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right) e = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho c_p \alpha \boldsymbol{\nabla} T\right)$$

Equação de trabalho e energia: $z_1 + p_1/\gamma + v_1^2/(2g) + h_b = z_2 + p_2/\gamma + v_2^2/(2g) + h_t + h_l$