



Universidade Federal do Paraná  
Setor de Tecnologia - TC

**Mecânica dos Fluidos Ambiental I**  
Engenharia Ambiental 2018-1

Curitiba, 04.07.2018

**Avaliação Final**  
**Mecânica dos Fluidos Ambiental I**

*Tobias Bleninger*  
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)  
Centro Politécnico, Bloco V, Sala 9.22  
Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: \_\_\_\_\_

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos	Pontos totais	
1		15	
2			
3			
4			
4			
5			Nota
Soma			

### Questões

1. (15 P) A Fig. 1 mostra quatro cenários para escoamentos permanentes, uniformes, laminares e viscosos entre duas placas paralelas com e sem gradiente de pressão e com e sem movimento constante das placas. A gravidade pode ser desconsiderada, as velocidades nas direções  $y$  e  $z$  são  $v = w = 0$ .
- Desenha qualitativamente as distribuições de velocidade na secção A da Fig. 1.
  - Descreva a equação que poderia ser utilizado para calcular o perfil e determine a equação do perfil para o cenário d).
  - Desenha qualitativamente as distribuições da tensão de cisalhamento na Fig. 1
  - Descreva a equação que poderia ser utilizado para calcular o perfil das distribuições da tensão de cisalhamento (não requer cálculo).

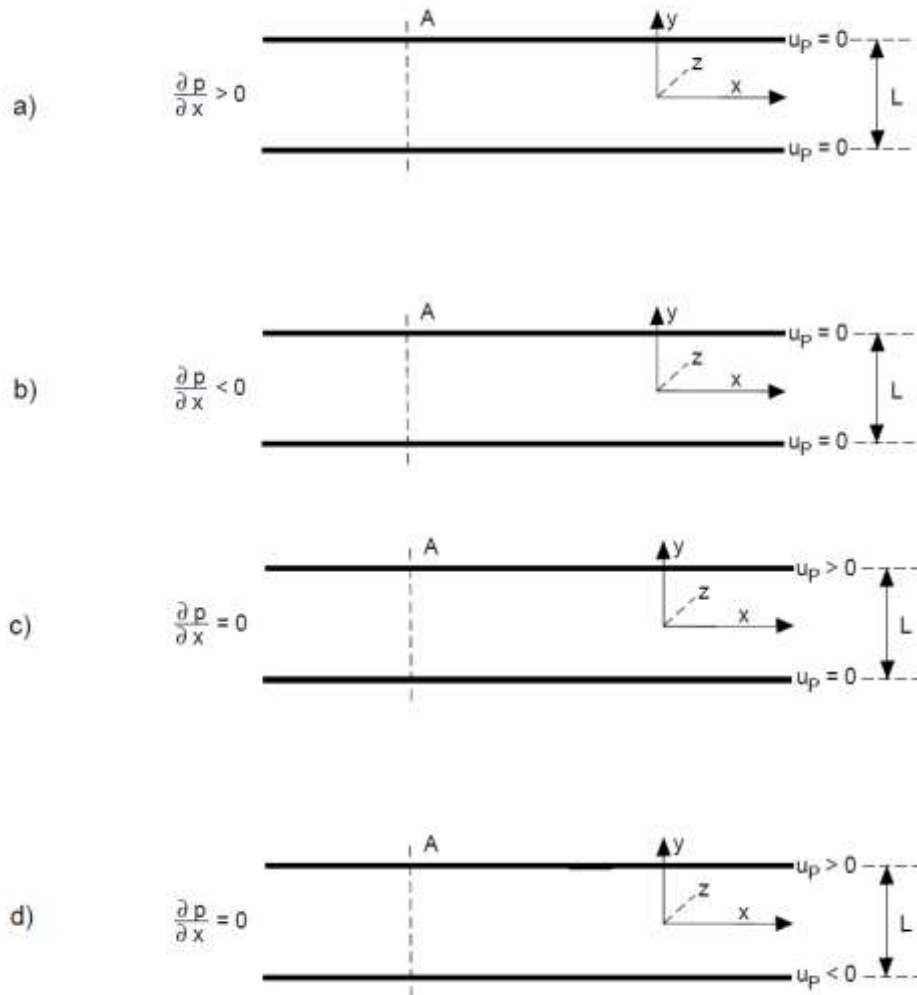
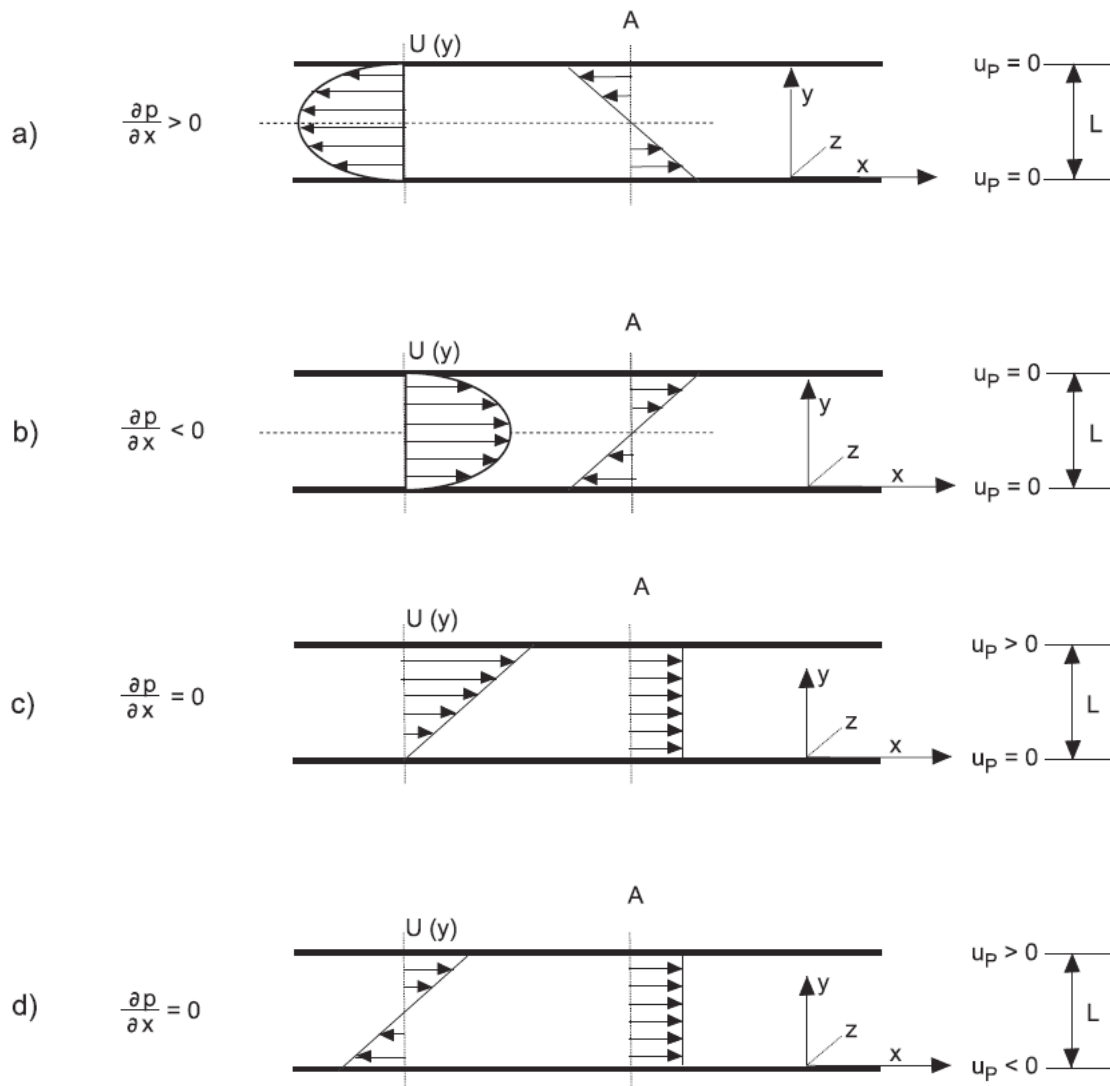


Fig. 1: Escoamento entre placas

### Solução



Equação para caso d):

Navier Stokes em direção x: só resta  $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$

Integrando:  $u(y) = c_1 y + c_2$

C.C.:  $u(y = L/2) = u_p$  e  $u(y = -L/2) = -u_p$

segue  $c_1 = 2u_p/L$  e  $c_2 = 0$

segue  $u(y) = 2yu_p/L$

Equação para tensão:  $\tau_{xy} = \mu \partial u(y) / \partial y$

2. (15 P) Sistemas de aviso de emergências e placas iluminadas nas BRs podem ser gerados com pequenas usinas eólicas. A velocidade perto do chão pode ser considerada em média  $V = 4 \text{ m/s}$ . A hélice tem um diâmetro de  $D = 1 \text{ m}$  e gira com  $n = 15 \text{ giros/min}$ . Para obter a força atuando no eixo faz-se análises em um modelo reduzido. A força depende também da viscosidade dinâmica e massa específica do ar.
  - a. Define os parâmetros independentes e as dimensões e faça uma análise dimensional para obter os parâmetros adimensionais.
  - b. Quais parâmetros adimensionais foram obtidos?
  - c. Qual valor de  $V_m$  para a velocidade do vento no túnel de vento e qual  $n_m$  deve ser escolhido para um modelo em escala  $1/4$ .
  - d. Qual valor de  $V_{m,2}$  e  $n_{m,2}$  deve ser escolhido quando o modelo anterior é testado num túnel de vento de sobrepresão (massa específica 6 vezes maior

- do que a nas condições atmosféricas regulares, mas considerando que a viscosidade dinâmica fica constante)  
e. Qual escala de similaridade se obtém nos dois casos para as forças?

$$1. \quad F = f_1(D, n, V, \rho, \mu)$$

$$[ML/T^2] \quad [L] \quad [1/T] \quad [L/T] \quad [M/L^3] \quad [M/TL]$$

$$2. \quad F/\rho = f_2(D, n, V, \mu/\rho)$$

$$[L^4/T^2] \quad [L] \quad [1/T] \quad [L/T] \quad [L^2/T]$$

$$3. \quad F/(\rho V^2) = f_3(D, n/V, \mu/\rho V)$$

$$[L^2] \quad [L] \quad [1/L] \quad [L]$$

$$4. \quad F/(\rho V^2 D^2) = f_4(nD/V, \mu/\rho VD)$$

$$[-] \quad [-] \quad [-]$$

1.2

$$F/(\rho V^2 D^2) \rightarrow F/(\rho V^2/2(nD^2/4)) = F/(\rho V^2/2A_p) = c_w$$

$c_w$ -Wert: coeficiente de atrito

$$\mu/\rho VD = \nu/(VD) = 1/Re$$

$nD/V$  : numero cinematico

$$c_w = f_5(nD/V, Re)$$

1.3

$$L_R = D/D_M = 4$$

$$Re_R = Re/Re_M = 1$$

$$Re/Re_M = VD/\nu * \nu_M/(V_M D_M)$$

túnel de vento e ar  $\rightarrow \nu_M/\nu = 1$

$$V_M = VD/D_M = 4m/s \cdot 4 = 16 m/s$$

$$n/n_M = V/D * D_M/V_M$$

$$n_M = V_M n D / (V D_M)$$

$$n_M = 240 \text{ U/min}$$

1.4

$$\nu = \mu/\rho, \mu = \text{const.}$$

$$\nu/\nu_{M,2} = \rho_{M,2}/\rho = 6$$

$$Re/Re_{M,2} = 1 = VD/\nu * \nu_{M,2}/(V_{M,2} D_M)$$

$$V_{M,2} = VD/D_M \cdot \nu_{M,2}/\nu = 4 \cdot 4 \cdot 1/6 = 2,67 m/s$$

$$n_{M,2} = V_{M,2} n D / (V D_M) = 2,67/4 * 15 * 4 = 40 \text{ U/min}$$

1.5

$$F/(\rho V^2 D^2)$$

$$F/F_M = (\rho V^2 D^2)/(\rho_M V_M^2 D_M^2)$$

$$\text{caso 1: } \nu/\nu_M = \rho_M/\rho = 1: F/F_M = 1 \cdot 0,25^2 \cdot 4^2 = 1$$

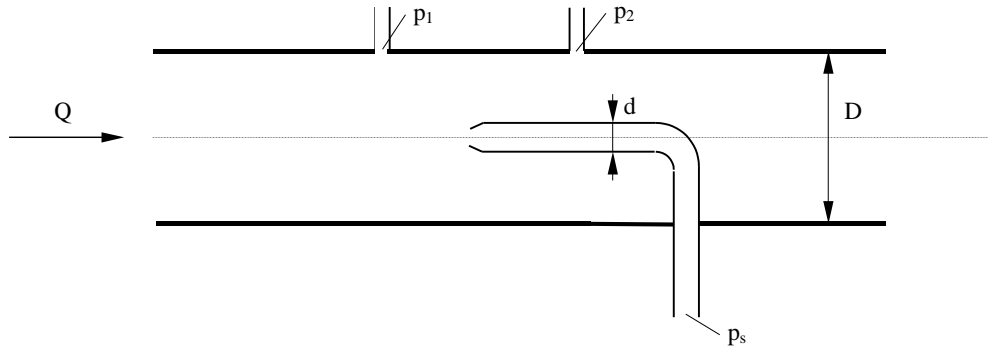
$$\text{caso 2: } \nu/\nu_{M,2} = \rho_{M,2}/\rho = 6: F/F_M = 1/6 * (4/2,67)^2 * 4^2 = 6$$

3. (20 P) Numa tubulação com diâmetro D passa um líquido do qual se quer medir a vazão utilizando um tubo Pitot com diâmetro d e um piezômetro na parede. Ambos

encontram-se no mesmo plano horizontal. A velocidade na tubulação pode ser considerada aproximadamente constante e uniforme e o escoamento sem atrito.

- Qual local é melhor para o piezômetro (posição 1 ou 2)? Justifique sua escolha.
- Defina uma equação para obter a vazão medindo na posição 1.
- Defina uma equação para obter a vazão medindo na posição 2.
- Calcule o erro relativo da medição de vazão entre os dois pontos usando  $\alpha = d^2/D^2$ .

- Desenha qualitativamente a linha de energia e a linha piezométrica na figura.



**a)**

- em 1 já que não tem influência do tubo de pitot.

**b)**

$$\frac{p_s}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma}$$

$$= \frac{v_1^2}{2g}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{(p_s - p_1)}{\gamma} 2g}$$

$$Q = v_1 \cdot A_1$$

$$Q = \sqrt{\frac{(p_s - p_1)}{\gamma} 2g} \pi D^2 / 4$$

**c)**

$$\text{Bernoulli: } \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$z_1 = z_2 \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{ii})$$

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_2 = V_1 A_1 / A_2$$

$$V_1 \pi D^2 0,25 / (\pi 0,25 (D^2 - d^2))$$

$$V_2 = V_1 D^2 / (D^2 - d^2)$$

$$\text{com } \alpha = d^2/D^2 \text{ segue } v_2 = v_1 \frac{1}{1 - \alpha} \quad (\text{iii})$$

$$(\text{iii}) \text{ in } (\text{ii}): \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\left(v_1 \frac{1}{1 - \alpha}\right)^2}{2g}$$

$$p_2 = p_1 + \frac{v_1^2 \gamma}{2g} - \frac{\left(v_1 \frac{1}{1 - \alpha}\right)^2 \gamma}{2g} \quad (\text{iv})$$

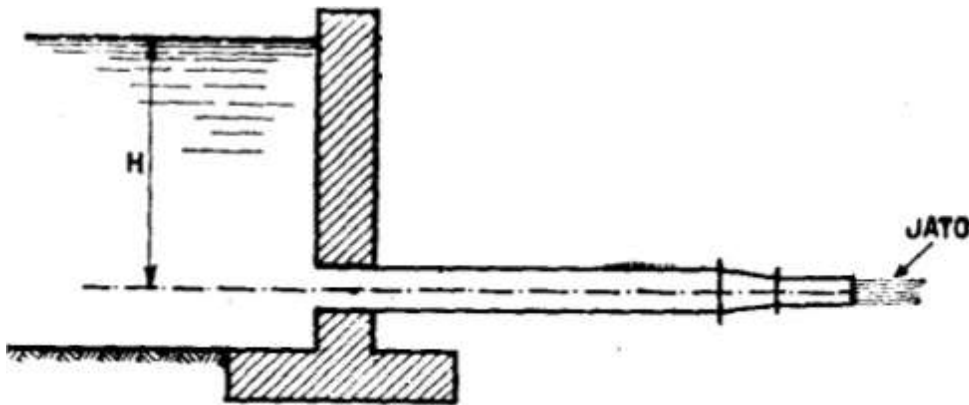
$$\textcircled{1} \quad (\text{iv}) \text{ in (i): } \frac{\Delta Q}{Q} = 1 - \frac{\sqrt{p_s - p_1 - \frac{v_1^2 \gamma}{2g} + \frac{\left(V_1 \frac{1}{1-\alpha}\right)^2 \gamma}{2g}}}{\sqrt{p_s - p_1}}$$

$$\textcircled{1} \quad \text{mit } p_s - p_1 = v_1^2 \gamma / (2g) \rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = 1 - \sqrt{\frac{\left(V_1 \frac{1}{1-\alpha}\right)^2 \gamma}{2g} \cdot \frac{2g}{v_1^2 \gamma}}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\Delta Q}{Q} = 1 - \sqrt{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\Delta Q}{Q} = 1 - \frac{1}{1-\alpha}$$

4. (20 P) De uma barragem parte uma curta canalização, com 50 cm de diâmetro e em sua extremidade há uma redução da seção que passa a ter 20 cm de diâmetro. Depois deste bocal a água passa para a atmosfera, sob a forma de jato, em uma vazão de 300 l/s. O escoamento pode ser considerado sem atrito.
- Qual a pressão na entrada do tubo?
  - Qual a altura H (entre o reservatório e o centro da canalização)?
  - Qual é a força horizontal na fixação da canalização a barragem?
  - Desenha qualitativamente a linha de energia e a linha piezométrica na figura



5. (10P) A comporta ( Fig. 2, largura B, estrutura sem água, peso desprezível) abre quando o nível de água se encontra exatamente na altura do eixo.
- Desenha qualitativamente na Fig. 2 as distribuições de pressão que atuam na comporta.
  - Calcule o valor de K para que a comporta abra nesta condição.

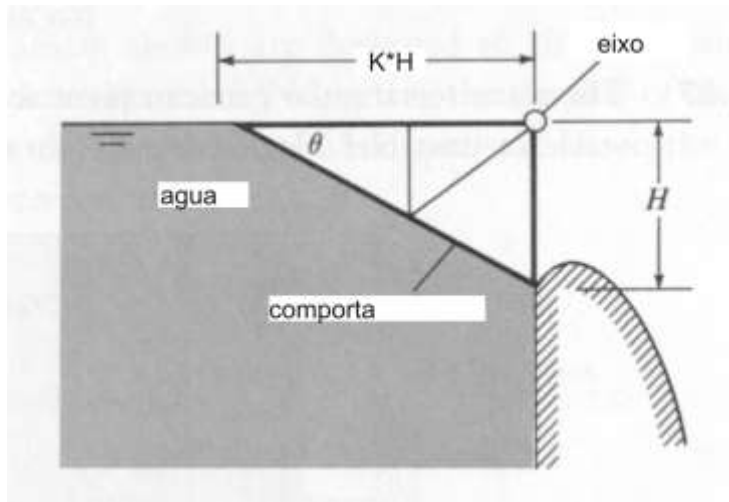


Fig. 2: Comporta

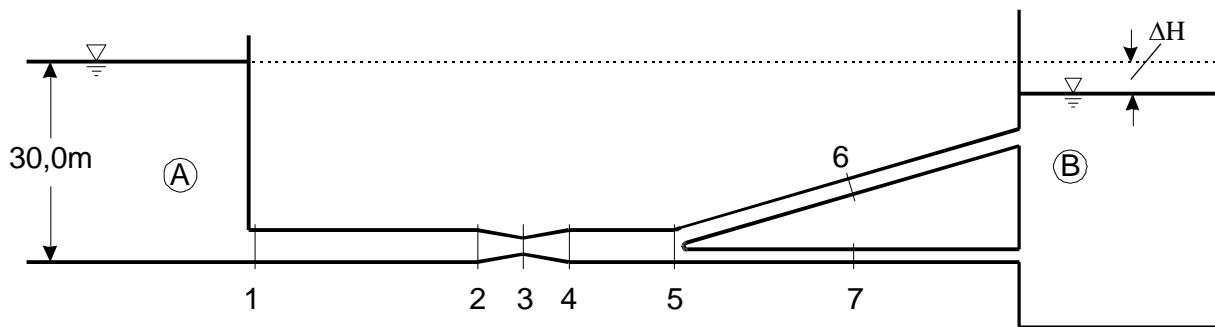
### Solução

Gráfico: 5 ponto

$$\Sigma M_{\text{eixo}} = 0 = H^{1/2} \gamma \cdot HB \cdot \frac{2}{3} H - H^{1/2} \gamma \cdot KHB \cdot \frac{1}{3} KH$$

$$K = 2^{1/2}$$

6. (20) Um grande tanque A alimenta um tanque B através uma tubulação ( $d_1 = d_2 = d_4 = d_5 = 0,2 \text{ m}$ ,  $d_3 = d_6 = 0,1 \text{ m}$ ). Entre a seção 2 e 3 foi medido a diferença da altura de pressão de 20m. Atrito na tubulação pode ser desconsiderado.
- Qual é a vazão na tubulação?
  - Calcule o diâmetro  $d_7$  para que na seção 6 passa o dobro da vazão que na seção 7.
  - Calcule a diferença entre os níveis dos tanques.
  - Desenha a linha de energia e linha piezométrica.



5.6.1:

$$H = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$z_2 = z_3$$

$$\frac{p_2 - p_3}{\gamma} = \Delta h$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} \quad ; \quad V_3 = \frac{Q}{A_3}$$

$$z_2 + \Delta h + \left(\frac{1}{A_2}\right)^2 \frac{Q^2}{2g} = z_3 + \left(\frac{1}{A_3}\right)^2 \frac{Q^2}{2g}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{1}{A_3^2} - \frac{1}{A_2^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m}}{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0,1^2 \text{ m}^2\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0,2^2 \text{ m}^2\right)^2}}} = 0,16 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

5.6.2:

Für die Rohre 6 und 7 stimmen Energielinie und Drucklinie überein, d.h. die Geschwindigkeits- höhen sind gleich.

$$\frac{V_6^2}{2g} = \frac{V_7^2}{2g}$$

$$V_6 = V_7$$

$$Q_6 = 2Q_7$$

$$V_6 \frac{\pi}{4} d_6^2 = 2V_7 \frac{\pi}{4} d_7^2 = 2V_6 \frac{\pi}{4} d_7^2$$

$$d_6^2 = 2d_7^2$$

$$d_7 = \frac{d_6}{\sqrt{2}} = 0,0707 \text{ m}$$

5.6.3:

$$H = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_7 + \frac{p_7}{\gamma} + \frac{V_7^2}{2g}$$

$$z_A = 30 \text{ m}$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = 0$$

$$V_A \approx 0$$

$$z_7 = 0$$

$$\frac{p_7}{\gamma} = z_A - \Delta H$$

$$V_7 = \frac{\frac{1}{3}Q}{A_7} = \frac{\frac{1}{3}Q}{\frac{\pi}{4}d_7^2}$$



$$H = z_A + 0 + 0 = 0 + z_A - \Delta H + \frac{V_7^2}{2g}$$

$$\Delta H = \frac{V_7^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left( \frac{\frac{1}{3}Q}{\frac{\pi}{4}d_7^2} \right)^2 = \frac{1}{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}} \left( \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,16 \frac{m^3}{s}}{\frac{\pi}{4} \cdot (0,0707 m)^2} \right)^2 = 9,40 m$$

**Equações dadas:**

**Equações dadas:**

Conservação de massa de fluido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV_c + \int_{S_c} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) = 0 \quad \text{com } V_c: \text{ volume de controle, } S_c: \text{ superfície de controle,}$$

$\rho$ : massa específica,  $t$ : tempo,  $\vec{V}$ : vetor velocidade,  $\vec{A}$ : vetor área normal

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

Conservação de massa de um soluto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} C_a \rho dV_c + \int_{S_c} C_a \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{S_c} D \nabla (C_a \rho) d\vec{A} \quad \text{com } C_a: \text{ concentração do soluto e } D:$$

difusividade molecular

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A.$$

Conservação de calor:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} T c_p \rho dV_c + \int_{S_c} T c_p \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{S_c} D_T \nabla (T c_p \rho) d\vec{A} \quad \text{com } T: \text{ temperatura e } D_T:$$

difusividade térmica

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T,$$

Equação de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \left[ \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$$

Componentes da aceleração em escoamentos com vetor velocidade  $\mathbf{V} = (u, v, w)$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

Componentes do vetor rotação  $\boldsymbol{\omega}$

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Deformação

$$g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$g_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$g_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Equação de Bernoulli:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const.}$$