

Curitiba, 17.10.2016

Exercício 2
Mecânica dos Fluidos I

Tobias Bleninger

Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Data de entrega (no max. até 12h): 02.12.2016
(trabalhos atrasados receberão a nota 0)

As **soluções** deverão ser entregues **impressas em forma de relatório e em forma digital (pdf email) e formatação profissional** (texto digitado, equações numeradas, numerações de paginas e figuras, referencias bibliográficas e as figuras, titulo, introdução, resumo, conclusões e discussão e analise detalhada dos resultados).

Adicionalmente haverá uma **apresentação obrigatória dos resultados nas aulas de 1 e 2: 05/12/16, 3 e 4: 07/12/16, 5 e 6: 09/12/16** com presença obrigatória de todos os alunos (não presença receberá nota 0 no item apresentação e arguição). O arquivo da apresentação (pdf ou ppt, tempo maximo de 20min, ultrapassar tempo custa pontos) deve ser encaminhado por email também até **02/12/16 (no max. 24h)** e não pode ser modificado posteriormente.

O trabalho escrito (50%), a apresentação (20%), as perguntas aos colegas e a arguição (30%) receberá nota que conta para nota final.

Informações adicionais (software, etc.): <http://people.ufpr.br/~bleninger/mecfluI.htm>

Nomes e assinaturas dos participantes do grupo (garantindo que foi contribuído ao trabalho, sem assinatura: nota 0, *pontuação preenchido pelo professor*):

Nome	Assinatura		Apresentação	Arguição	Total

Pontuação da parte escrita (preenchido pelo Professor):

Item	Pontos	Pontos	
Conteúdo/respostas (60%)			
Discussão/analise (20%)			
Forma (20%)			
Soma			Nota parte escrita

Questões

Todos os grupos:

1. Aula em laboratório didático de mecânica dos fluidos
 - a. Descrevem e explicam e desenhem o sistema experimental do canal onde foi medida a velocidade durante a aula de laboratório.
 - b. Descrevem e explicam e desenhem os equipamentos de medição de velocidade.
 - c. Visualizem os dados medidos:
 - i. Componente u do Molinete e ADV num único gráfico (seções verticais, transversais)
 - ii. Componentes u, v, w do ADV num único gráfico
 - iii. Calculam velocidades médias na vertical e transversal e pela seção toda, junto com desvio padrão e min/Max
 - iv. Calculam a vazão com ambos dados e comparem com a leitura no manômetro.
 - d. Interpretam e discutem os resultados e métodos de medição.
2. A Fig. 1 mostra quatro cenários para escoamentos permanentes, uniformes, laminares e viscosos entre duas placas paralelas com e sem gradiente de pressão e com e sem movimento constante das placas. A gravidade pode ser desconsiderada, as velocidades nas direções y e z são $v = w = 0$.
 - a. Desenha qualitativamente as distribuições de velocidade na seção A da Fig. 1.
 - b. Descreva a equação que poderia ser utilizado para calcular o perfil e determine a equação do perfil para o cenário d).
 - c. Desenha qualitativamente as distribuições da tensão de cisalhamento na Fig. 1
 - d. Descreva a equação que poderia ser utilizado para calcular o perfil das distribuições da tensão de cisalhamento (não requer cálculo).

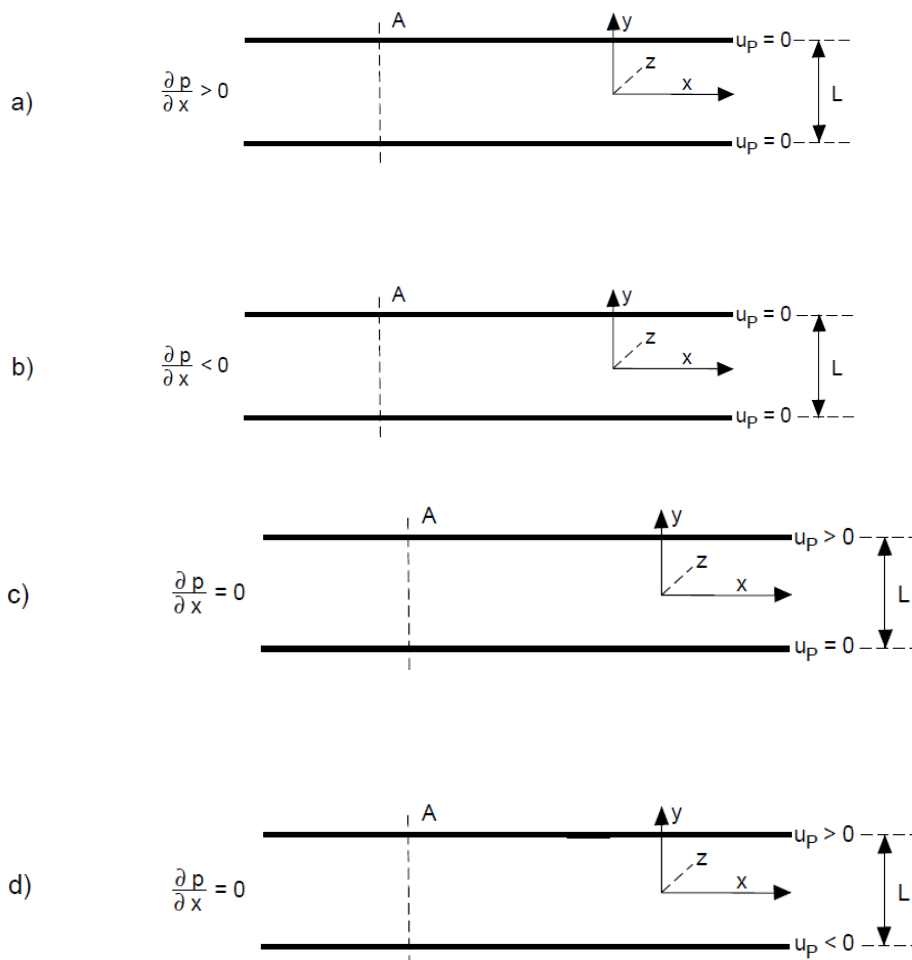
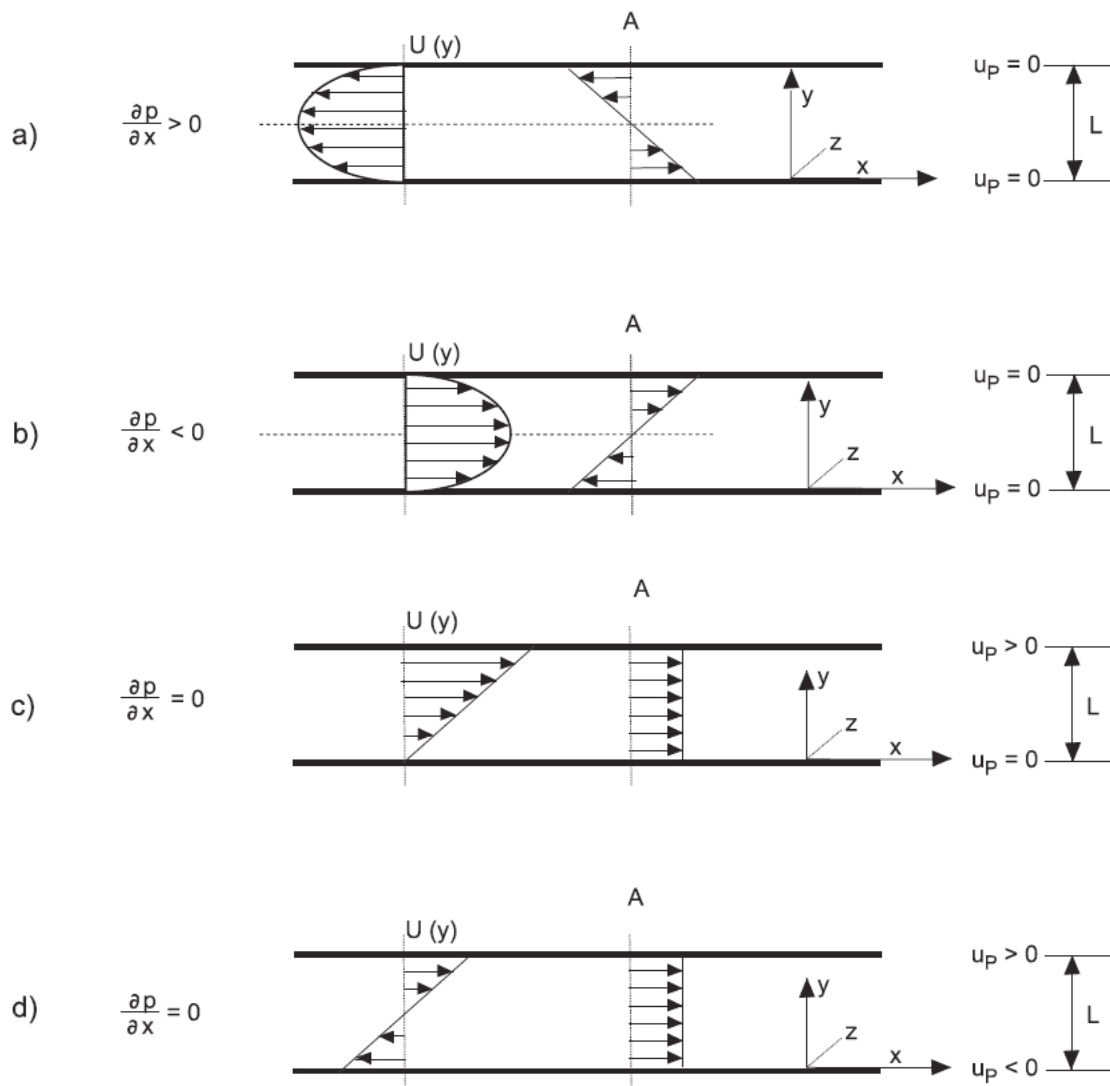


Fig. 1: Escoamento entre placas

Solução



Equação para caso d):

Navier Stokes em direção x: só resta $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$

Integrando: $u(y) = c_1 y + c_2$

C.C.: $u(y = L/2) = u_p$ e $u(y = -L/2) = -u_p$

segue $c_1 = 2u_p/L$ e $c_2 = 0$

segue $u(y) = 2yu_p/L$

Equação para tensão: $\tau_{xy} = \mu \partial u(y) / \partial y$

Grupo 1:

1. A Fig. 2 (vista em planta) mostra um injetor. Na seção 1 ($D_1 = 80$ mm) foi medido a pressão de $p_1 = 3$ bar. Na Seção 2 ($D_2 = 40$ mm) a água sai do injetor em forma de um jato livre horizontal com geometria circular que bate numa placa, inclinada com $\phi = 35^\circ$. As distribuições de velocidade no injetor e no jato podem ser considerada uniforme. O atrito entre o jato e a placa e dentro do injetor pode ser desconsiderada.
 - a. Calcule a vazão no injetor.
 - b. Desenhe um volume de controle na Fig. 2 que permite calcular a força horizontal no local dos parafusos do injetor (seção 1).

- Calcule magnitude e direção da força horizontal nos dois parafusos do injetor (seção 1).
- Desenhe um volume de controle na Fig. 2 que permite calcular as forças horizontais nos dois parafusos para segurar a placa.
- Calcule as vazões nas seções 3 e 4 após desvio do jato.
- Calcule magnitude, local e direção da força resultante para segurar a placa.

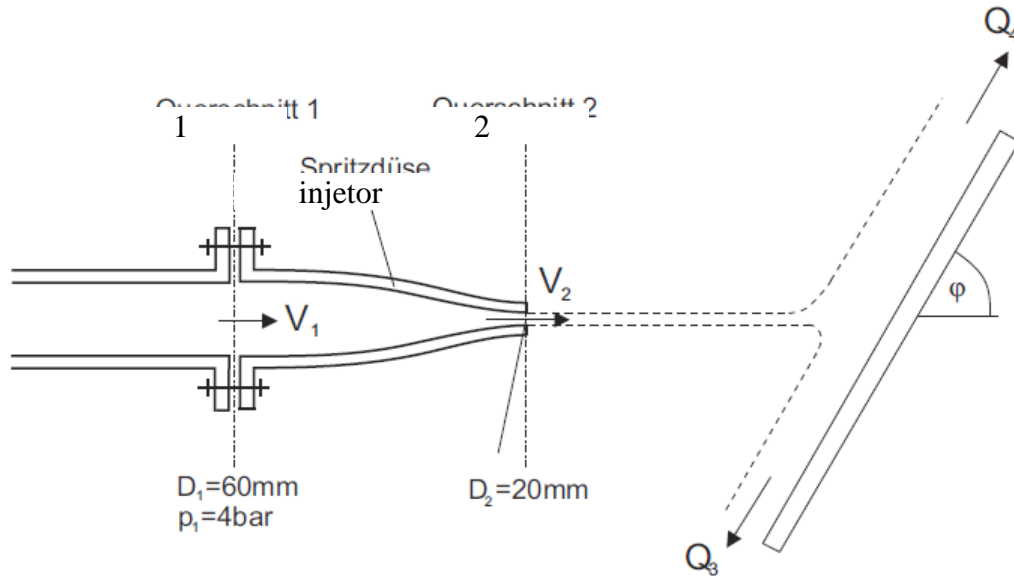


Fig. 2: Injetor e jato livre e placa (vista em planta)

Solução

$p_1 = 4\text{bar}$, $D_1 = 60\text{mm}$, $D_2 = 20\text{mm}$

a) Kontinuitätsgleichung

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_2 = V_1 A_1 / A_2$$

$$V_2 = V_1 D_1^2 / D_2^2$$

Bernoulligleichung

$$p_1/\gamma + V_1^2/2g + z_1 = p_2/\gamma + V_2^2/2g + z_2$$

$$z_1 = z_2 ; p_2/\gamma = 0$$

$$p_1/\gamma + V_1^2/2g - (V_1 D_1^2 / D_2^2)^2 / 2g = 0$$

$$V_1 = [-p_1/\gamma * 2g / (1 - (D_1^2/D_2^2)^2)]^{0,5}$$

$$V_1 = [-800/-80]^{0,5} = 3,16\text{m/s}$$

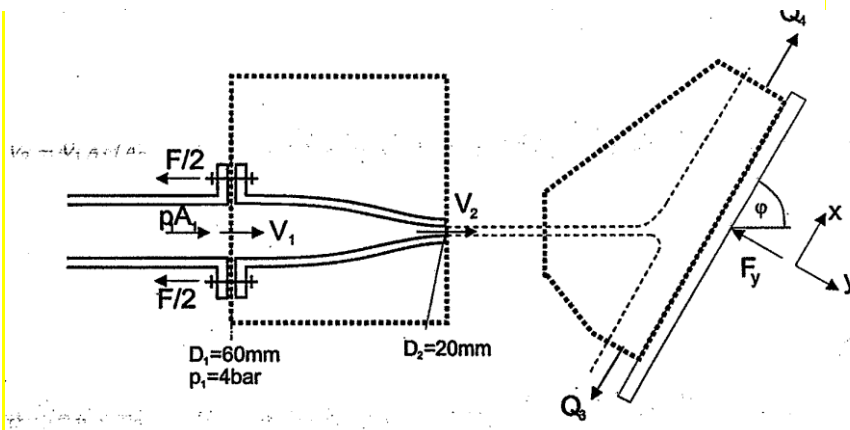
$$Q = V_1 A_1 = 8,94\text{l/s}$$

b)

Kontrolloberfläche siehe Skizze.

Wichtig: Kontrolloberfläche steht senkrecht auf Geschwindigkeitsvektoren.

c)



Summe aller Kräfte auf das Kontrollvolumen: $-F + p_1 A_1$

Summe der Impulse: $-\rho Q V_1 + \rho Q V_2$

$$F = p_1 A_1 + \rho Q V_1 - \rho Q V_2$$

$$V_2 = Q/A_2 = 28,46 \text{ m/s}$$

$$F = 1130,97 \text{ N} - 226,18 \text{ N}$$

$$F = 904,78 \text{ N}$$

d)

Kontrolloberfläche steht senkrecht auf Geschwindigkeiten

e)

$$V_3 = V_4 = V_2 = 28,46 \text{ m/s}$$

$$Q - Q_4 = Q_3$$

Kräfte entlang der Platte (x-Richtung) sind Null, da keine Reibung $\rightarrow F_x = 0$

Summe der Impulse in x-Richtung:

$$-\rho Q V_2 \cos \varphi + \rho Q_4 V_2 + \rho Q_3 (-V_2)$$

$$\rightarrow 0 = -Q \cos \varphi + Q_4 - Q_3$$

$$0 = -Q \cos \varphi + Q_4 - (Q - Q_4)$$

$$Q_4 = Q(\cos \varphi + 1)/2$$

$$Q_4 = 8,13 \text{ l/s}$$

$$Q_3 = Q - Q_4 = 0,81 \text{ l/s}$$

f)

$$F_x = 0 \text{ (siehe e)}$$

$$-F_y = -\rho Q V_2 \sin \varphi$$

$$F_y = 145,7 \text{ N}$$

Kraftangriffspunkt in Achse des ankommenden Strahls, Wirkungsrichtung in y-Richtung.

Für $p_1 = 3 \text{ bar}$, $D_1 = 80 \text{ mm}$, $D_2 = 40 \text{ mm}$ ergeben sich die folgenden Werte:

$$V_1 = [-600 / -15]^{0,5} = 6,32 \text{ m/s}$$

$$Q = 31,80 \text{ l/s}$$

$$V_2 = 4 * V_1 = 25,30 \text{ m/s}$$

$$F = 1507,96 \text{ N} - 603,19 \text{ N} = 904,77 \text{ N}$$

$$Q_4 = 28,92 \text{ l/s}$$

$$Q_3 = 2,87 \text{ l/s}$$

$$F_y = 460,4 \text{ N}$$

2. Sistemas de aviso de emergências e placas iluminadas nas BRs podem ser gerados com pequenas usinas eólicas. A velocidade perto do chão pode ser considerada em media $V = 4 \text{ m/s}$. A hélice tem um diâmetro de $D = 1 \text{ m}$ e gira com $n = 15 \text{ giros/min}$. Para obter a força atuando no eixo faz-se análises em um modelo reduzido. A força depende também da viscosidade dinâmica e massa específica do ar.
 - a. Define os parâmetros independentes e as dimensões e faça uma análise dimensional para obter os parâmetros adimensionais.
 - b. Quais parâmetros adimensionais foram obtidos?
 - c. Qual valor de V_m para a velocidade do vento no tunel de vento e qual n_m deve ser escolhido para um modelo em escala $1/4$.
 - d. Qual valor de $V_{m,2}$ e $n_{m,2}$ deve ser escolhido quando o modelo anterior é testado num túnel de vento de sobrepressão (massa específica 6 vezes maior do que a nas condições atmosféricas regulares, mas considerando que a viscosidade dinâmica fica constante)
 - e. Qual escala de similaridade se obtém nos dois casos para as forças?

1.

$$F = f_1(D, n, V, \rho, \mu)$$

$$[ML/T^2] = [L] [1/T] [L/T] [M/L^3] [M/TL]$$

2.

$$F / \rho = f_2(D, n, V, \mu / \rho)$$

$$[L^4/T^2] = [L] [1/T] [L/T] [L^2/T]$$

3.

$$F/(\rho V^2) = f_3(D, n/V, \mu/(\rho V))$$

[L²] [L] [1/L] [L]

4

$$F/(\rho V^2 D^2) = f_4(nD/V, \mu/(\rho VD))$$

[-] [-] [-]

1.2

$$F/(\rho V^2 D^2) \rightarrow F/(\rho V^2/2(nD^2/4)) = F/(\rho V^2/2A_p) = c_w$$

c_w -Wert: coeficiente de atrito
 $\mu/(\rho VD) = \nu/(VD) = 1/Re$
 nD/V : numero cinematico

$$c_w = f_5(nD/V, Re)$$

1.3

$$L_R = D/D_M = 4$$

$$Re_R = Re/Re_M = 1$$

$$Re/Re_M = VD/\nu * \nu_M/(V_M D_M)$$

$$\text{t\u00fanel de vento e ar} \rightarrow \nu_M/\nu = 1$$

$$V_M = VD/D_M = 4\text{m/s} \cdot 4 = 16 \text{ m/s}$$

$$n/n_M = V/D * D_M/V_M$$

$$n_M = V_M nD/(VD_M)$$

$$n_M = 240 \text{ U/min}$$

1.4

$$\nu = \mu/\rho, \mu = \text{const.}$$

$$\nu/\nu_{M,2} = \rho_{M,2}/\rho = 6$$

$$Re/Re_{M,2} = 1 = VD/\nu * \nu_{M,2}/(V_{M,2} D_M)$$

$$V_{M,2} = VD/D_M \cdot \nu_{M,2}/\nu = 4 \cdot 4 \cdot 1/6 = 2,67 \text{ m/s}$$

$$n_{M,2} = V_{M,2} nD/(VD_M) = 2,67/4 * 15 * 4 = 40 \text{ U/min}$$

1.5

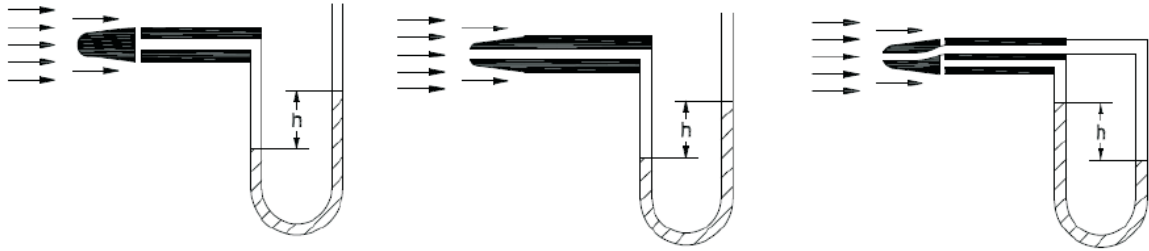
$$F/(\rho V^2 D^2)$$

$$F/F_M = (\rho V^2 D^2)/(\rho_M V_M^2 D_M^2)$$

$$\text{caso 1: } \nu/\nu_M = \rho_M/\rho = 1: F/F_M = 1 \cdot 0,25^2 \cdot 4^2 = 1$$

$$\text{caso 2: } \nu/\nu_{M,2} = \rho_{M,2}/\rho = 6: F/F_M = 1/6 * (4/2,67)^2 * 4^2 = 6$$

4. Com os tubos seguintes obtem-se diferentes leituras h nos tubos. Descreve quais parâmetros são medidos e como correspondem com os termos da equação de Bernoulli.



Grupo 2:

- A Fig. 3 mostra um sistema de tubulações fornecido com água de um grande tanque de pressão ($H_1 = 10$ m) passando duas tubulações e chegando num grande tanque com superfície livre ($H_2 = 8,5$ m). A tubulação superior ($D_o = 0,1$ m) termina em forma de uma jato livre no ar na cota $H_3 = 9$ m, a tubulação inferior termina como jato livre submerso na água no segundo tanque. Na tubulação inferior ($D_{i1} = 0,4$ m, $D_{i2} = 0,2$ m) foi medido a pressão $p = 1,2$ bar no ponto P. O atrito nas tubulações do sistema pode ser desconsiderada, já que são tubulações curtas.
 - Desenha na Fig. 3 qualitativamente a linha piezométrica e a linha de energia para a tubulação inferior e os dois tanques.
 - Calcule a vazão na tubulação inferior.
 - Calcule a pressão p_i no tanque de pressão.
 - Desenha na Fig. 3 qualitativamente a linha piezométrica e a linha de energia para a tubulação superior e os dois tanques.
 - Calcule a vazão na tubulação superior.
 - Calcule o nível de água no piezômetro que foi colocado na tubulação superior e desenha este nível na Fig. 3.

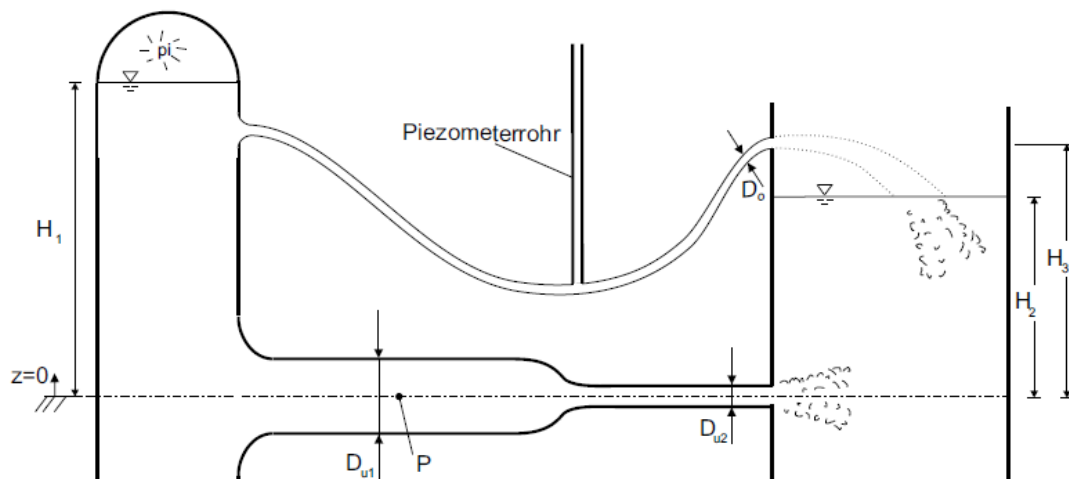
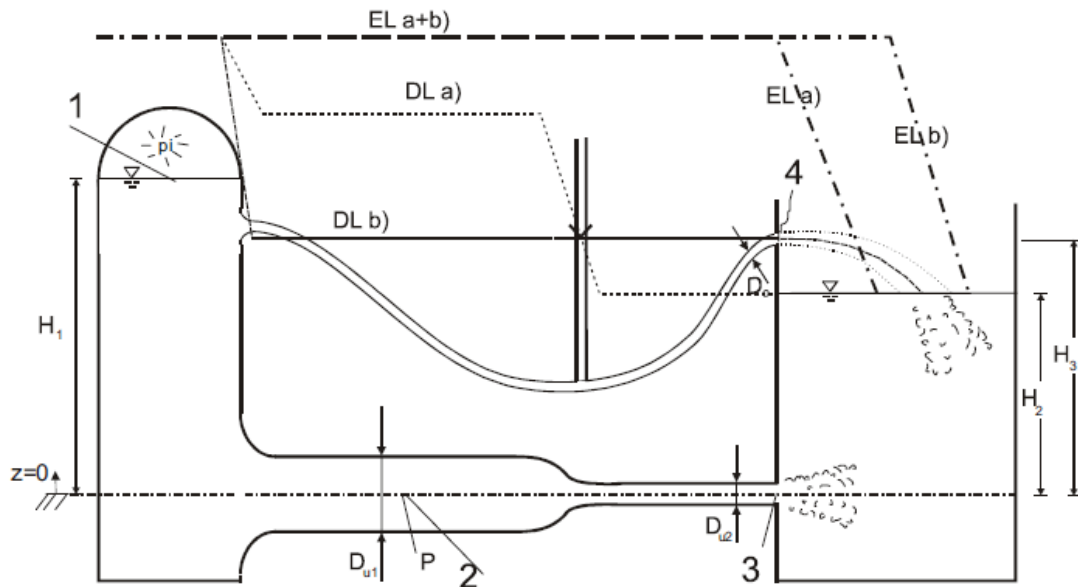


Fig. 3: Sistema de tubulações

Solução



c)

$$p_1/\gamma + V_1^2/2g + z_1 = p_3/\gamma + V_3^2/2g + z_3$$

$$z_1 = H_1 ; V_1^2/2g = 0 ; p_3/\gamma = H_2 ; z_3 = 0$$

$$p_1 = (H_2 + V_3^2/2 - H_1)\gamma$$

$$p_1 = 24,34 \text{ kN/m}^2$$

e)

$$p_1/\gamma + V_1^2/2g + z_1 = p_4/\gamma + V_4^2/2g + z_4$$

$$z_1 = H_1 ; V_1^2/2g = 0 ; p_4/\gamma = 0 ; z_4 = H_3$$

$$V_4 = [(p_1/\gamma + H_1 - H_3)2g]^{0,5}$$

$$V_4 = 8,264 \text{ m/s}$$

$$Q = V_4 A_4 = 0,065 \text{ m}^3/\text{s}$$

f)

$$z_{\text{piezo}} = H_3$$

$$z_{\text{piezo}} = 9 \text{ m}$$

b) Bernoulligleichung:

$$p_2/\gamma + V_2^2/2g + z_2 = p_3/\gamma + V_3^2/2g + z_3$$

$$z_2 = z_3 = 0 ; p_3/\gamma = H_2$$

$$p_2/\gamma + V_2^2/2g = H_2 + V_3^2/2g$$

Kontinuitätsgleichung:

$$V_2 A_2 = V_3 A_3$$

$$V_2 = V_3 A_3 / A_2$$

$$p_2/\gamma + (V_3 A_3 / A_2)^2 / 2g - H_2 = V_3^2 / 2g$$

$$p_2/\gamma - H_2 = V_3^2 / 2g (1 - (A_3 / A_2)^2)$$

$$V_3 = [(p_2/\gamma - H_2) 2g / (1 - (A_3 / A_2)^2)]^{0,5}$$

$$V_3 = [73,23 / 0,9375]^{0,5} = 8,838 \text{ m/s}$$

$$Q = V_3 A_3 = 0,278 \text{ m}^3/\text{s}$$

2. Uma bola esférica foi analisada em escala 1:3 num lago, sendo arrastado em baixo da água. O modelo teve o diâmetro $d = 0,3 \text{ m}$ e foi arrastado com a velocidade de $V = 1,5 \text{ m/s}$ na água com temperatura de $T = 15^\circ\text{C}$ e foi medida uma força de arrasto de $F = 90 \text{ N}$.
- a. Qual força resulta do protótipo em realidade em ar na temperatura de $T = 15^\circ\text{C}$?

Solucao

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f(\text{Re})$$

da análise dimensional: coeficiente de resistencia c_{\sim}

$$\text{Re} = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

Semelhanca Reynolds

$$Re_r = \frac{Re_m}{Re_p} = \frac{V_r \cdot L_r}{v_r} = 1$$

$$V_r = \frac{v_r}{L_r}$$

$$c_r = \frac{\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2} \right)_m}{\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2} \right)_p} = \frac{F_m}{F_p} \cdot \frac{1}{\rho_r V_r^2 L_r^2} = 1$$

$$F_p = \frac{F_m}{\rho_r V_r^2 L_r^2} = \frac{F_m}{\rho_r \left(\frac{v_r}{L_r} \right)^2 L_r^2} = \frac{F_m}{\rho_r v_r^2}$$

$$F_m = 90 \text{ N}$$

$$\rho_r = \frac{\rho_m}{\rho_p} = 800 \text{ bei } 15^\circ\text{C}$$

$$v_r = \frac{v_m}{v_p} = 0,08 \text{ bei } 15^\circ\text{C}$$

$$F_p = \frac{F_m}{\rho_r v_r^2} = \frac{90 \text{ N}}{800 \cdot 0,08^2} = 17,57 \text{ N}$$

3. (30 P) Uma tubulação ($D_1 = 0,8\text{m}$) de um reservatório chega na casa de força de uma hidrelétrica para alimentar uma turbina de jato livre ($D_2 = 0,2\text{m}$). O tubo com o bocal esta fixado no fundamento alguns metros antes do bocal. Na secção 1 foi colocado uma peça de amortecimento que não passa forças nem momentos (veja Fig. 4). A pressão na secção é $p_1 = 5,16 \text{ kPa}$ e a vazão $Q = 4 \text{ m}^3/\text{s}$. O volume interno do tubo com bocal (da secção 1 a secção 2) é $V = 15,3 \text{ m}^3$. A distancia entre a secção 1 e a curva é $L = 20 \text{ m}$. O angulo da curva é $\alpha = 30^\circ$. Todas as perdas de energia podem ser desconsideradas.
- Calcule a força resultante F (magnitudo e orientação) que atua na fixação.
 - Desenha a linha de energia e a linha piezométrica esquematicamente na Fig. 4.

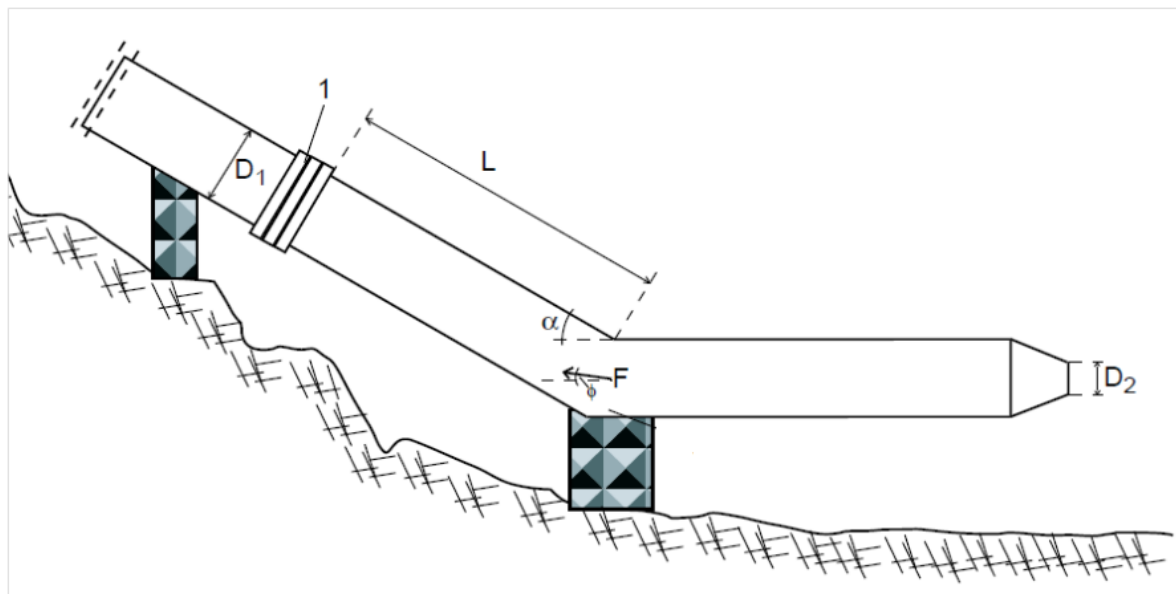


Fig. 4: Jato livre para turbina

Solução:

Velocidades em 1 e 2:

$$\frac{Q}{A_1} = V_1 = \frac{4 \text{ m}^3}{\text{s}} \frac{1 \cdot 4}{(0,8 \text{ m})^2 \cdot \pi} = 7,96 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{Q}{A_2} = V_2 = \dots = 127,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Componentes das velocidades:

$$V_{x1} = V_1 \cos(\alpha) = 6,89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{y1} = V_1 \sin(\alpha) = -3,98 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{mit} \quad \alpha = 30^\circ$$

Forças da pressão:

$$F_{p1} = p_1 A_1$$

$$= 5,16 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0,5 \text{ m}^2 = 2.580 \text{ N}$$

$$F_{p2} = p_2 A_2 = 0, \quad \text{da atmosphärische Druckverhältnisse}$$

Quantidade de movimento em x:

$$\sum F_H = 0 \iff \quad (1)$$

$$F_{p1} \cos(30^\circ) + \rho Q V_{x1} + F_x = F_{p2} + \rho Q V_{x2} \quad (2)$$

$$F_x = \rho Q (V_{x2} - V_{x1}) - F_{p1} \cos(30^\circ) \quad (3)$$

$$= 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \left(127,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 6,89 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) - 2580 \text{ N} \cos(30^\circ) = 479,1 \text{ kN} \quad (4)$$

Quantidade de movimento em y:

$$\sum F_V = 0 \iff \quad (5)$$

$$- F_{p1} \sin(30^\circ) + \rho Q V_y + F_y - G = 0 \quad (6)$$

$$(7)$$

$$2580 \text{ N} \sin(30^\circ) - 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot \left(-3,98 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) + 15,3 \text{ m}^3 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = F_y \quad (8)$$

$$F_y = 167,3 \text{ kN}$$

Força resultante:

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ &= \sqrt{(479,1 \text{ kN})^2 + (167,3 \text{ kN})^2} \\ &= 507,76 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\tan(\phi) = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \phi = 19,23^\circ$$

Grupo 3:

1. Quando se aproxima uma bola de ping pong num jato de ar (temperatura de $T = 20^\circ\text{C}$) que sai de um bocal (diâmetro $D = 0,05 \text{ m}$) com velocidade $V_1 = 20\text{m/s}$ e inclinação com ângulo $\alpha_1 = 60^\circ$, observe-se que a bola fica sugado pelo jato e fica prendido no jato. O jato nesta situação passa a ser desviado com um ângulo contra a horizontal de $\alpha_2 = 50^\circ$.
 1. Determine uma relação geral para calcular a massa M_k da bola nesta situação.
 2. Qual é a massa M_k da bola com os valores dados.

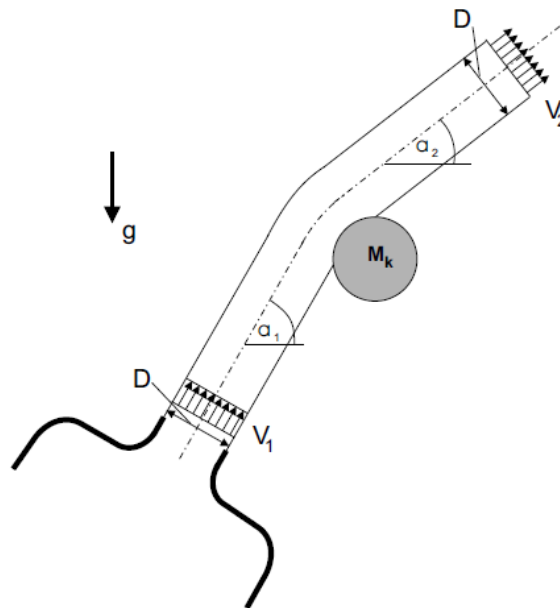


Fig. 5: Jato de ar com bola de ping pong

Solução

Aufgabe 5

Freistrah: $V_1 = V_2 = V$

$$Q_1 = V_1 * A_1 = V_2 A_2 = Q_2$$

$$Q = V * D^2/4 * \pi$$

$$Q = 0,0393\text{m}^3/\text{s}$$

Vertikaler Impulssatz:

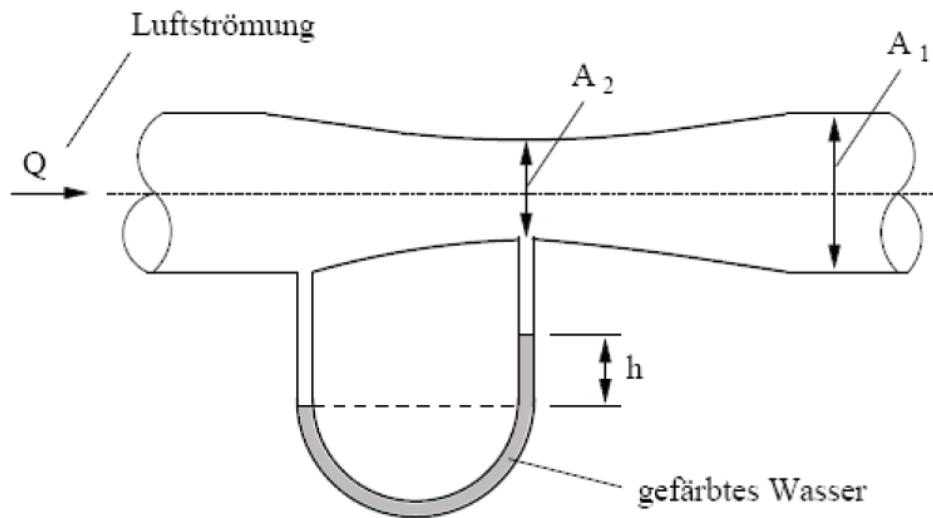
$$-M_k * g = [-\rho Q V] \sin \alpha_1 + [\rho Q V] \sin \alpha_2$$

$$M_k = \rho Q V (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) / g$$

$$M_k = 9,605\text{g}$$

2. Num tubo de Venturi com escoamento de ar foi medido a diferença de pressão (com água colorido) entre as secções A1 und A2. Calcule a vazão considerando o escoamento irrotacional, incompressível, permanente e sem atrito.

$$h = 5,00 \text{ cm}, \quad A_1 = 40,00 \text{ cm}^2, \quad A_2 = 25,00 \text{ cm}^2$$



3. Numa barreira de óleo (Fig. 6) num rio deve ser calculada a força F_x por metro largura que atua na barreira. O nível na montante (secção 1) é $h_1 = 3\text{m}$ e a distribuição da velocidade na montante pode ser considerado uniforme $v_1 = \text{const.}$ A distancia entre o fundo e a barreira é $y_{\text{barr}} = 2\text{m}$. O nível na jusante (secção 2) é $h_2 = 2,95\text{m}$ e o perfil de velocidade tem uma parte em forma de uma parábola $v_{2,a} = 2y - y^2$ [m/s] de $y = 0$ a $y = y_{\text{barr}}$ e uma velocidade uniforme $v_{2,b} = 0$ de $y = y_{\text{barr}}$ a $y = h_2$. O escoamento é permanente e as distribuições de pressão nas secções 1 e 2 e nos dois lados da barreira podem ser consideradas hidrostáticas. O escoamento pode ser considerado sem atrito.

- Calcule a velocidade v_1 .
- Calcule a velocidade media na secção 2.
- Calcule a força F_x por metro largura da barreira.
- Calcule a profundidade total (olea e água) no lado da montante da barreira.

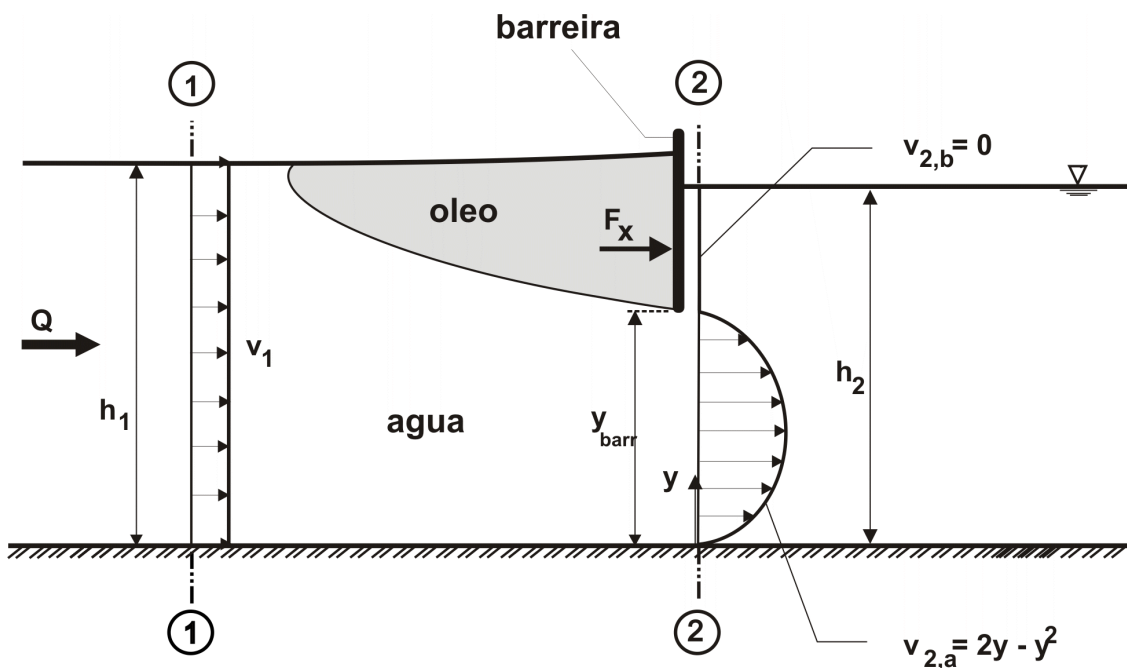


Fig. 6: Barreira de óleo

Solucoes

3.1

① Continuidade: $q_1 = q_2 = q$

$$q = \int_0^y v(y) \cdot dy$$

①

$$q_2 = \int_0^{y_{TW}} v_2 \cdot dy = \int_0^2 (2y - y^2) dy$$

①

$$q_2 = \left[y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^2$$

①

$$q_2 = 4 - 8/3 = 4/3 \text{ m}^3/(\text{sm largura})$$

①

$$q_2 = q_1 = v_1 h_1$$

①

$$v_1 = q_1/h_1$$

①

$$v_1 = 4/3 \cdot 1/3 = 0,44 \text{ m/s}$$

$$\Sigma_{3.1} = 8$$

3.2

$$\textcircled{1} v_2 = q/y_{TW} \text{ oder } v_2 = \frac{1}{a} \int_0^{y_{TW}} v_2 \cdot dy$$

①

$$v_2 = 0,66 \text{ m/s}$$

$$\Sigma_{3.2} = 2$$

3.3

Que. de quantidade de movimento entre 1 e 2

$$\textcircled{1} \Sigma F = \Sigma I \Leftrightarrow P_1 A_1 - P_2 A_2 - F_x = I_2 - I_1$$

$$\textcircled{1} F_x = P_1 A_1 - P_2 A_2 - I_2 + I_1$$

$$\textcircled{1} P_1 A_1 = \rho_w \cdot g \cdot \frac{h_1^2}{2}$$

$$\textcircled{1} P_1 A_1 = 44145 \text{ N/m}$$

$$\textcircled{1} P_2 A_2 = \rho_w \cdot g \cdot \frac{h_2^2}{2}$$

$$\textcircled{1} P_2 A_2 = 42685 \text{ N/m}$$

$$\textcircled{1} I_1 = \rho_w q v_1$$

$$\textcircled{1} I_1 = 586,67 \text{ N/m}$$

$$\textcircled{1} I_2 = \rho_w q v_2$$

$$\textcircled{1} I_2 = 888,89 \text{ N/m}$$

$$\textcircled{1} F_x = 44145 - 42685 - 888,89 + 586,67 = 1157 \text{ N/m}$$

$$\Sigma_{3.3} = 11$$

3.4

$$\textcircled{1} P_1 (y = y_{TW}) = P_{ow} (y = y_{TW})$$

$$\textcircled{1} P_{ow} = (h_1 - y_{TW}) \gamma_w$$

$$\textcircled{1} h_{ow} = y_{TW} + P_{ow}/\gamma_{öl}$$

$$\textcircled{1} h_{low} = y_{TW} + (h_1 - y_{TW}) \gamma_w / \gamma_{öl}$$

$$\textcircled{1} h_{ow} = 2 + (3-2)1000/900 = 3,11 \text{ m}$$

$$\Sigma_{3.4} = 5$$

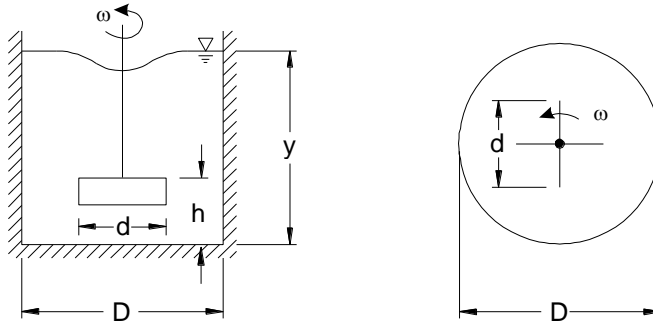
$$\Sigma_3 = 8 + 2 + 11 + 5 = 26$$

3. Para a construção de um arejador de superfície com um hélice misturador que se gira com uma velocidade angular constante ω [1/s] é necessário de fazer uma análise dimensional para obter a potencia N [Nm/s] necessária. Os parâmetros característicos são a densidade ρ , o peso específico γ e a viscosidade dinâmica μ .

- Porque a densidade e o peso específico são parâmetros característicos para este problema (justifique com poucas palavras)?
- Define os números adimensionais característicos do problema.
- Define um numero Reynolds e Froude para este problema.
- Define para a escala geométrica L_r dada e um fluido igual em modelo e realidade a velocidade angular ω_m necessário no modelo através da semelhança Froude e Reynolds e discute o resultado em poucas palavras.

Dados:

Diâmetro	$d = 1 \text{ m}$	Velocidade angular	$\omega = 120 \text{ s}^{-1}$
Diâmetro	$D = 3 \text{ m}$	Aceleração gravitacional	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Distancia	$h = 1 \text{ m}$	Densidade	$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
Profundidade	$y = 3 \text{ m}$	Escala geométrica	$L_r = 1/2$



Solucao

5a) Se requer a densidade ρ por causa da inercia e o peso especifico ou g por causa da aceleracao de gravidade (superficio livre).

6.2.2: Analise dimensional

$\mu = \nu \cdot \rho$

$$\begin{aligned}
 N &= f(d, D, h, y, \omega, \rho, \gamma, \mu) \\
 \left[\frac{F \cdot L}{T} \right] &= f \left([L], \left[\frac{1}{T} \right], \left[\frac{M}{L^3} \right], \left[\frac{F}{L^3} \right], \left[\frac{L^2 M}{T L^3} \right] \right) \\
 \left[\frac{ML}{T^2} \cdot \frac{L}{T} \right] &= \left[\frac{M}{L^2 T^2} \right] \\
 &= \left[M \frac{L^2}{T^3} \right]
 \end{aligned}$$

1) }

$N - M = 6$ parametros adimensionais

$N = 9$ variaveis

$M = 3$ dimensoes

2) \underline{I} : $d [L]$

$$\frac{N}{d^2} = f_1 \left(\frac{D}{d}, \frac{h}{d}, \frac{y}{d}, \omega, \rho d^3, \gamma d^2, \mu d \right)$$

$$\left[\frac{1}{T} \right] [M] \left[\frac{M}{T^2} \right] \left[\frac{M}{T} \right]$$

3) \underline{I} : $\omega = \left[\frac{1}{T} \right]$

$$\frac{N}{d^2 \omega^3} = f_2 \left(\frac{D}{d}, \frac{h}{d}, \frac{y}{d}, \rho d^3, \frac{\gamma d^2}{\omega^2}, \frac{\mu d}{\omega} \right)$$

[M] [M] [M] [M]

M: $\rho d^3 [M]$

$$\frac{N}{\rho d^5 \omega^3} = f_3 \left(\frac{D}{d}, \frac{h}{d}, \frac{y}{d}, \frac{\gamma d^2}{\omega^2 \rho d^3}, \frac{\mu d}{\omega \rho d^3} \right)$$

$$\left[\frac{g}{d \omega^2} \right] \quad \left[\frac{v}{d^2 \omega} \right]$$

$$\frac{N}{\rho d^5 \omega^3} = f_3 \left(\frac{D}{d}, \frac{h}{d}, \frac{y}{d}, \frac{g}{d \omega^2}, \frac{v}{d^2 \omega} \right)$$

6.2.3 (a): Froude
 $d \omega$ velocidade

$$\frac{g}{d \omega^2} = \left(\frac{\sqrt{g \cdot d}}{d \cdot \omega} \right)^2 = \frac{1}{Fr^2}$$

$$Fr = \frac{d \cdot \omega}{\sqrt{g \cdot d}} = \sqrt{\frac{d}{g}} \omega$$

6.2.3 (b): Reynolds

$$\frac{v}{d^2 \omega} = \frac{v}{(d \omega) d} = \frac{1}{Re}$$

$$Re = \frac{d^2 \omega}{v}$$

6.2.4 (a): Semelhança de Froude

$$\frac{Fr_m}{Fr_p} = \sqrt{\frac{d_m}{d_p} \frac{g_p}{g_m}} \frac{\omega_m}{\omega_p} = Fr_r \stackrel{!}{=} 1$$

$L_r \quad \frac{1}{g_r}$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g_r}{L_r}} \omega_p = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}}} \omega_p = \sqrt{2} \cdot \omega_p$$

6.2.4 (b) Semelhança de Reynolds

$$\frac{Re_m}{Re_p} = \left(\frac{d_m}{d_p} \right)^2 \frac{\omega_m}{\omega_p} \frac{v_p}{v_m} = \frac{L_r^2}{v_r} \frac{\omega_m}{\omega_p} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\omega_m = \frac{v_r}{L_r^2} \omega_p = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \omega_p = 4 \omega_p$$

DILEMMA: $\omega_m \text{ Froude} = \sqrt{2} \omega_p \neq \omega_m \text{ Reynolds} = 4 \omega_p$

Somente possível com números de Reynolds grande e com invariança de Reynolds

Grupo 4:

- Um tubo com dois orifícios tem o comprimento $L = 0,4\text{m}$, a massa (sem água) de $M = 20\text{ kg}$ e é fixado num grande tanque de água (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**). O nível do tanque é $H = 6\text{ m}$ acima do eixo do tubo. A área do

tubo é $A_1 = 0,1\text{m}^2$ e os dois orifícios criam jatos livres com áreas de $A_2 = A_3 = 0,025\text{m}^2$. O centro da área A_3 se encontra na cota do eixo do tubo e na metade do tubo. As distribuições de velocidade no tubo e nos podem ser consideradas uniforme. O escoamento pode ser considerado sem atrito.

- Desenha a linha piezométrica e a linha de energia pelo eixo do tubo qualitativamente na (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**)
- Calcule as vazões passando as áreas A_1 , A_2 und A_3 .
- Calcule pelo tubo as magnitudes e direções dos componentes da força nas direções x, y e z no local da fixação do tubo no tanque que é necessário para segurar o tubo utilizando um sistema de coordenadas com origem no ponto P na área 1. A distribuição de pressão na área A_1 pode ser considerado uniforme e igual a pressão no ponto P no eixo do tubo.
- Calcule os momentos ao redor dos eixos x, y e z no ponto P que resultam devido as forças calculadas anteriormente.

Solucao

2.1

2.2

$$H = 6\text{m} = V_2^2/2g$$

$$V_2 = 10,85\text{ m/s}$$

$$Q_2 = A_2 V_2$$

$$= 0,27\text{m}^3/\text{s}$$

$$V_2 = V_3 = 10,85\text{m/s}$$

$$Q_3 = Q_2 = 0,27\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$= 0,54\text{m}^3/\text{s}$$

①

①

①

①

①

①

①

$\Sigma_{2,1}=7$

2.3

Druck am Querschnitt 1 (Bernoulli entlang der Stromlinie entlang der Rohrachse):

$$p_1/\gamma + v_1^2/2g = v_2^2/2g$$

$$v_1 = Q_1/A_1$$

$$= 5,4\text{m/s}$$

$$p_1 = 44,28\text{ kN/m}^2$$

①

①

①

①

Impulssatz:

$$p_1 A_1 + F_x = -V_1^2 \rho A_1 + V_2^2 \rho A_2$$

$$F_x = -4,40\text{kN}$$

$$F_z = -V_3^2 \rho A_3$$

$$= -2,94\text{ kN}$$

$$F_x = G_{\text{rohr}} + G_{\text{wasser}}$$

$$= 196,2\text{N} + \gamma V_{\text{rohr}}$$

$$V_{\text{rohr}} = L A_1$$

$$F_z = 0,59\text{ kN}$$

$$\textcircled{1} (p_1 A_1), \textcircled{1} (-V_1^2 \rho A_1 + V_2^2 \rho A_2)$$

①

①

①

①

①

①

①

$\Sigma_{2,3}=13$

2.4

Momente:

$$M_x = 0$$

$$M_y + F_z L/2 = 0$$

$$M_y = -0,118\text{ kNm}$$

$$M_z + F_x L/2 = 0$$

$$M_z = 0,59\text{ kNm}$$

①

①

①

①

①

$\Sigma_{2,4}=5$

$\Sigma_{\text{ges},2}=30$

- Num modelo reduzido para uma comporta costeira deve ser analisado a força da pressão p devido as ondas. A força depende principalmente da profundidade y , da altura da onda h , da velocidade da onda V , do período da onda T , da massa específica do peso específico da água do mar.
 - Faca uma análise dimensional para calcular a força da pressa.
 - Qual lei de similaridade deve ser utilizado?

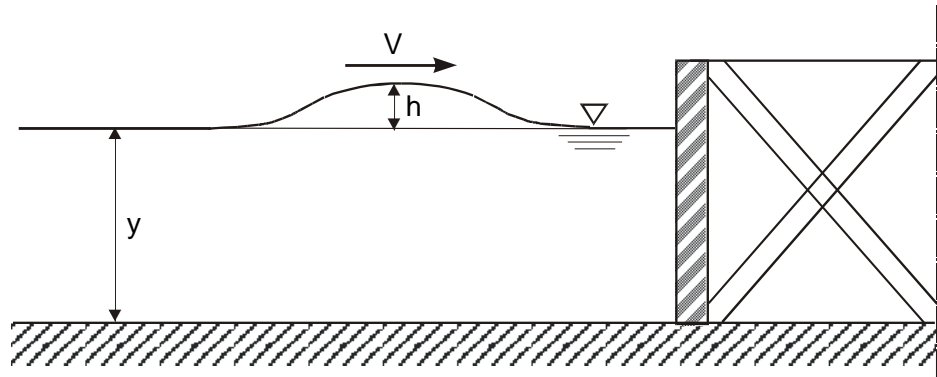
- c. O modelo será feito na escala 1/10 e com água doce. Quais valores devem ser escolhidos para y_m , h_m , V_m e T_m ?
- d. Qual força age no protótipo se foi medido no laboratório a força 10 kPa?

Protótipo:

Altura da onda: $h=1$ m
Velocidade da onda: $V=10$ m/s
Profundidade: $y=20$ m
Período: $T=20$ s

Modelo:

Escala: $L_R=1:10$



1

1.1

1.

$$p = f(y, h, V, T) \quad \left(\frac{F/L^2}{[M/LT^2]} = f\left(\frac{[L]}{[L]}, \frac{[L]}{[L]}, \frac{[L/T]}{[L/T]}, \frac{[T]}{[T]} \right) \right)$$

2.

$$p / \rho = f(y, h, V, T) \quad \left(\frac{[L^2/T^2]}{[L]} = f\left(\frac{[L]}{[L]}, \frac{[L]}{[L]}, \frac{[L/T]}{[L/T]}, \frac{[T]}{[T]} \right) \right)$$

3.:

$$p / \rho V^2 = f(y, h, T*V) \quad \left(\frac{[L]}{[L]} = f\left(\frac{[L]}{[L]}, \frac{[L]}{[L]}, \frac{[L]}{[1/L]} \right) \right)$$

4.:

$$p / \rho V^2 = f(h/y, T*V/y, \dots) \quad \left(\frac{[L]}{[L]} = f\left(\frac{[L]}{[L]}, \frac{[L]}{[L]} \right) \right)$$

$$[-] = f([-], [-])$$

$$= g*y/V^2$$

$$= 1/Fr^2$$

1.2

Froude

1.3

$$y_m = y_p * L_r = 20 \text{ m} * (1/10) = 2 \text{ m}$$

$$h_m = h_p * L_r = 1 \text{ m} * (1/10) = 0,1 \text{ m}$$

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow V_m / y_m^{1/2} = V_p / y_p^{1/2} \Rightarrow V_r = V_m / V_p = (y_m / y_p)^{1/2} = L_r^{1/2}$$

$$V_m = V_p * L_r^{1/2} = 10 \text{ m/s} * (1/10)^{1/2} = 3,1623 \text{ m/s}$$

$$T_r = y_r / V_r = L_r / L_r^{1/2} = L_r^{1/2}$$

$$T_m = T_p * L_r^{1/2} = 20 \text{ s} * (1/10)^{1/2} = 6,3 \text{ s}$$

1.4

$$p_m / \rho_m V_m^2 = p_p / \rho_p V_p^2 \Rightarrow p_r = \rho_r * V_r^2 = \rho_r * L_r$$

$$p_r = \rho_{\text{süß}} / \rho_{\text{salz}} * L_r = 1000/1050/10 = 0,0952$$

$$p_p = p_m / p_r = 10 \text{ kPa} / 0,0952 = 105 \text{ kPa}$$

$$F_r = g_r * \rho_r * L_r^3 \Rightarrow p_r = F_r / L_r^2 = \rho_r * L_r$$

Grupo 5:

1. Uma placa fina com peso $G = 0,6 \text{ kN}$ com comprimento $L = 1 \text{ m}$ é pendurada num eixo D. Um jato de água horizontal com vazão $Q = 5 \text{ l/s}$ e velocidade $V_o = 15 \text{ m/s}$ com área retangular atinge a placa numa distancia $e = 0,8 \text{ m}$ do eixo. Atrito na placa pode ser desconsiderado.
 - a. Calcule as vazões Q_1 e Q_2
 - b. Calcule o angulo de inclinação β da placa
 - c. Calcule a força resultante (magnitude e orientação) em D que é necessário para segurar a placa

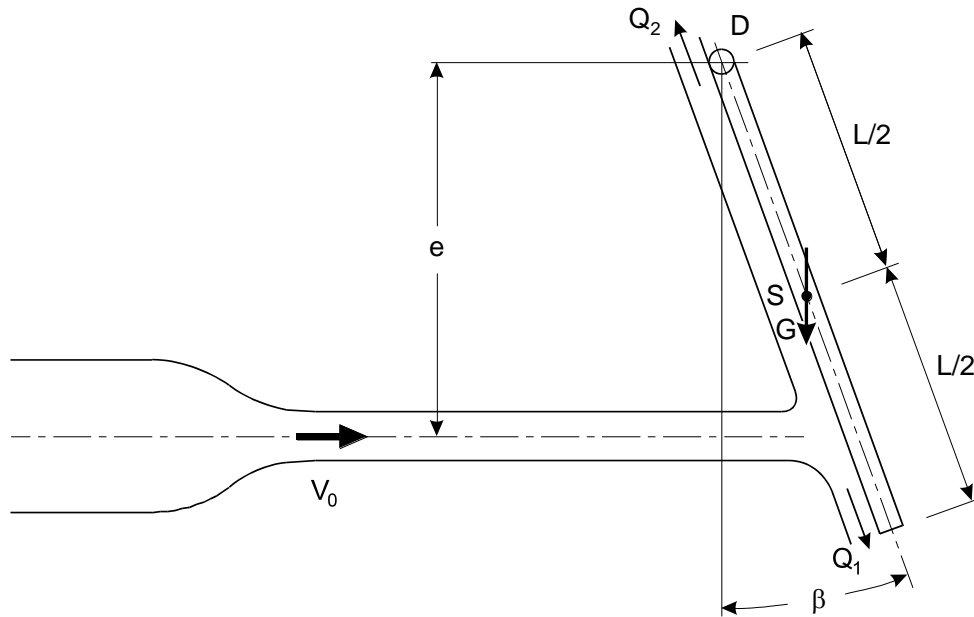
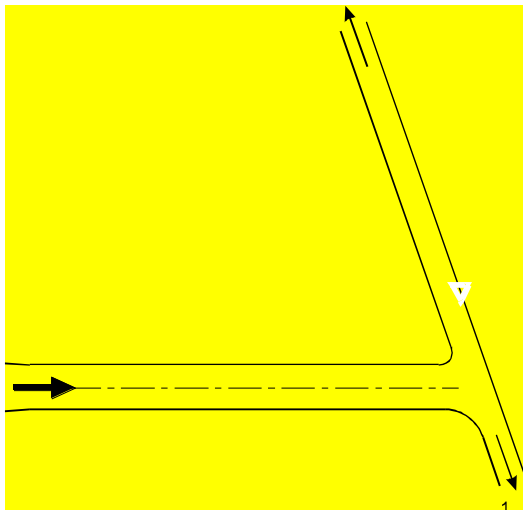


Fig. 7: Jato livre e placa no eixo

Solução

a) Considerando só volume de controle da água → Forças paralelo a placa = 0 (sem atrito)



$$\sum F_{\parallel} = -V_0 \sin \beta (-\rho Q) - V_1 \rho Q_1 + V_2 \rho Q_2 = 0$$

$$V_1 = V_2 = V_0 \text{ (Bernoulli)}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \text{ (continuidade)}$$

$$Q_1 = Q - Q_2$$

$$\Rightarrow + \sin \beta Q - (Q - Q_2) + Q_2 = 0$$

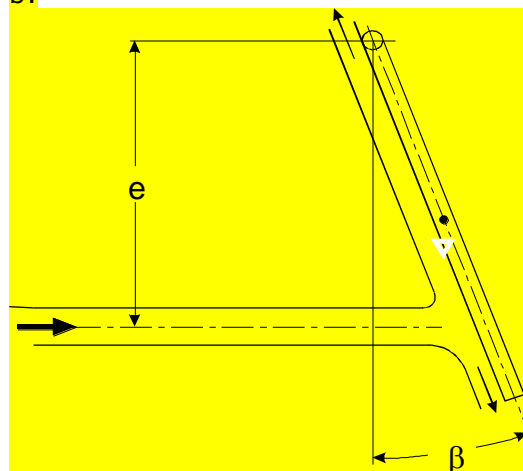
$$(1 - \sin \beta) Q = 2 Q_2$$

$$\frac{1 - \sin \beta}{2}$$

$$Q_2 = \frac{1 - \sin \beta}{2} Q = 1,99 \text{ l/s (com beta da parte b)}$$

$$Q_1 = Q - Q_2 = 3,01 \text{ l/s}$$

b:



$$\sum M_D = -G \frac{L}{2} \sin \beta = V_0 (-\rho Q) \cdot e$$

(momentos de $V_1 \rho Q_1, V_2 \rho Q_2$ podem ser desconsiderados)

$$\sin \beta = \frac{V_0 \rho Q e}{G \frac{L}{2}}$$

$$\beta = \arcsin \frac{V_0 \rho Q e}{G \frac{L}{2}} = 11,8^\circ$$

c: considerando volume de controle com placa e incluindo eixo D

$$\sum F_{\parallel} = F_{D\parallel} - G \cos \beta = -V_0 \sin \beta (-\rho Q) - V_1 \rho Q_1 + V_2 \rho Q_2 = 0 \quad (\text{sem atrito, veja parte a})$$

$$F_{D\parallel} = G \cos \beta = 576,2 \text{ N (como se somente tivesse a placa)}$$

$$\sum F_{\perp} = F_{D\perp} - G \sin \beta = V_0 \cos \beta (-\rho Q)$$

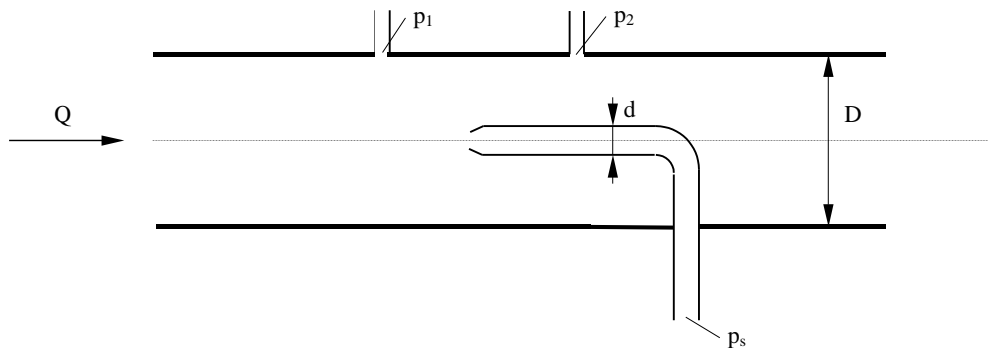
$$F_{D\perp} = G \sin \beta - V_0 \cos \beta \rho Q = 46,95 \text{ N}$$

$$F_D = \sqrt{F_{D\parallel}^2 + F_{D\perp}^2} = 578,07 \text{ N}$$

$$\alpha_D = \arctg (F_{D\perp} / F_{D\parallel}) = 4,65^\circ$$

2. Numa tubulação com diâmetro D passa um líquido do qual se quer medir a vazão utilizando um tubo Pitot com diâmetro d e um piezômetro na parede. Ambos encontram-se no mesmo plano horizontal. A velocidade na tubulação pode ser considerada aproximadamente constante e uniforme e sem atrito.

- Qual local é melhor para o piezômetro (posição 1 ou 2)? Justifique sua escolha.
- Defina uma equação para obter a vazão medindo na posição 1.
- Calcule o erro relativo da medição de vazão se for utilizado a posição 2.
- Defina a grandeza do erro dependendo somente de $\alpha = d^2/D^2$



a)

① em 1!

b)

$$\textcircled{1} \quad p_s/\gamma - p_1/\gamma$$

$$\textcircled{1} \quad = V_1^2/2g$$

$$\textcircled{1} \quad v_1 = \sqrt{\frac{(p_s - p_1)}{\gamma} 2g}$$

$$\textcircled{1} \quad Q = v_1 \cdot A_1$$

$$\textcircled{1} \quad Q = \sqrt{\frac{(p_s - p_1)}{\gamma} 2g} \pi D^2/4$$

c)

$$\textcircled{1} \quad \Delta Q/Q = (Q - Q_f)/Q_f$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} (\sqrt{p_s - p_1} - \sqrt{p_s - p_2})}{\frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \sqrt{p_s - p_1}}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{(\sqrt{p_s - p_1} - \sqrt{p_s - p_2})}{\sqrt{p_s - p_1}}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\Delta Q}{Q} = 1 - \frac{\sqrt{p_s - p_2}}{\sqrt{p_s - p_1}} \quad (i)$$

d)

$$\textcircled{1} \quad \text{Bernoulli: } \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$\textcircled{1} \quad z_1 = z_2 \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (ii)$$

$$\textcircled{1} \quad Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$\textcircled{1} \quad V_2 = V_1 A_1 / A_2$$

$$\textcircled{1} \quad V_1 \pi D^2 0,25 / (\pi 0,25 (D^2 - d^2))$$

$$\textcircled{1} \quad V_2 = V_1 D^2 / (D^2 - d^2)$$

$$\textcircled{1} \quad \text{com } \alpha = d^2/D^2 \text{ folgt } v_2 = v_1 \frac{1}{1-\alpha} \quad (iii)$$

$$\textcircled{1} \quad (iii) \text{ in } (ii): \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\left(V_1 \frac{1}{1-\alpha}\right)^2}{2g}$$

$$\textcircled{1} \quad p_2 = p_1 + \frac{v_1^2 \gamma}{2g} - \frac{\left(V_1 \frac{1}{1-\alpha}\right)^2 \gamma}{2g} \quad (iv)$$

$$\textcircled{1} \quad (iv) \text{ in } (i): \frac{\Delta Q}{Q} = 1 - \frac{\sqrt{p_s - p_1 - \frac{v_1^2 \gamma}{2g} + \frac{\left(V_1 \frac{1}{1-\alpha}\right)^2 \gamma}{2g}}}{\sqrt{p_s - p_1}}$$

$$\textcircled{1} \quad \text{mit } p_s - p_1 = v_1^2 \gamma / (2g) \rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = 1 - \sqrt{\frac{\left(V_1 \frac{1}{1-\alpha}\right)^2 \gamma}{\frac{2g}{\frac{v_1^2 \gamma}{2g}}}}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\Delta Q}{Q} = 1 - \sqrt{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\Delta Q}{Q} = 1 - \frac{1}{1-\alpha}$$

3. O fio de luz elétrico nos postos da rua tem um diâmetro de 10mm e uma rugosidade de 0,02mm. Numa ventania pode ser exposto a velocidades de $V = 120\text{km/h}$. Num experimento no laboratório hidráulico deve ser medido a força no fio num canal de água com $V_m = 0,5\text{m/s}$. A força depende também da viscosidade dinâmica.
- a. Faça uma análise dimensional para calcular a força.

- b. Qual lei de similaridade deve ser utilizado e quais parâmetros adimensionais foram obtidos?
- c. Qual diâmetro e rugosidade o fio no modelo deve ter?
- d. No modelo foi observado uma estrada de vórtices do tipo Karman com frequência de $f_m = 2\text{Hz}$. Faça uma análise dimensional para calcular a frequência na realidade e calcule a mesma.

a)

sistema fechado

b)

$$F = f_1(d, k_s, v, \mu, \rho)$$

$$[ML/T^2] [L] [L] [L/T] [M/TL] [M/L^3]$$

$$F/\rho = f_2(d, k_s, v, \mu/\rho)$$

$$[L^4/T^2] [L] [L] [L/T] [L^2/T]$$

$$F/(\rho v^2) = f_3(d, k_s, \mu/\rho v)$$

$$[L^2] [L] [L] [L]$$

$$F/(\rho v^2 d^2) = f_4(d/k_s, \mu/\rho v d)$$

$$C_w = f_5(k_s/d, Re)$$

c)

Original: $d_L = 10\text{ mm}$

(ar) $k_{s,L} = 0,02\text{ mm}$

$$v_L = 120\text{ km/h} = 33,33\text{ m/s}$$

$$v_L = 15 v_W$$

Modell: $v_W = 0,5\text{ m/s}$

(agua) $f_W = 100\text{ Hz}$

$$Re_L = Re_W$$

$$1P: \frac{v_L \cdot d_L}{v_L} = \frac{v_W \cdot d_W}{v_W}$$

$$1P: \frac{d_W}{d_L} = \frac{v_L \cdot v_W}{v_W \cdot v_L}$$

$$1P: \frac{d_W}{d_L} = \frac{v_L \cdot v_W}{v_W \cdot 15 \cdot v_W}$$

$$1P: \frac{d_W}{d_L} = \frac{33,33 \frac{m}{s}}{0,5 \frac{m}{s} \cdot 15} = 4,44$$

$$1P: d_W = 4,44 \cdot d_L = 4,44 \cdot 10\text{ mm} = 44,4\text{ mm} = 4,44\text{ cm}$$

$$1P: \text{Rauheit mit } \frac{k_L}{d_L} = \frac{k_W}{d_W}$$

$$1P: k_W = \frac{d_W}{d_L} \cdot k_L$$

$$1P: k_W = 4,44 \cdot 0,02\text{ mm} = 0,089\text{ mm}$$

d)

$$1P: f = f_1(d, k_s, v, \mu, \rho)$$

$$1P: [1/T] [L] [L] [L/T] [M/TL] [M/L^3]$$

$$0,5P: f = f_1(d, k_s, v, \mu/\rho)$$

$$0,5P: [1/T] [L] [L] [L/T] [L^2/T]$$

$$1P: f/v = f_2(d, k_s, \mu/\rho v)$$

$$1P: [1/L] [L] [L] [L] [L]$$

$$1P: df/v = f_3(d/k_s, v/(v d))$$

$$St = f_5(k_s/d, Re) \quad (St = \text{Strouhal - Zahl})$$

$$\Sigma_{3d} = 6$$

$$1P: St_L = St_W$$

$$1P: \frac{d_L \cdot f_L}{v_L} = \frac{d_W \cdot f_W}{v_W}$$

$$1P: \frac{f_L}{f_W} = \frac{d_W \cdot v_L}{d_L \cdot v_W}$$

$$1P: \frac{f_L}{f_W} = 4,44 \cdot \frac{\frac{120}{3,6}}{0,5} = 296,3$$

$$1P: f_L = 296,3 \cdot 2 \text{ Hz} = 592,60 \text{ Hz}$$