Curitiba, 14.06.2013

Avaliação 1
Mecânica dos Fluidos Ambiental I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, DHS, Bloco V, Sala 9.22
Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ____

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos	Pontos totais	
1		20	
2		15	
3		5	
4		15	
5		15	
6		20	Nota
Soma		90	

Questões

1. (20 P) Um Caisson (tanque cilíndrico de forma de funil, Fig. 1, com volume vazio $V_0 = 30000\ m^3$, peso $G = 1{,}5 \cdot 10^4$ kN, diâmetro D = 50 m, altura h = 5 m) com abertura na parte inferior é colocado na água.
   a. Calcule a profundidade y_1 que o Caisson entra na água, considerando uma compressão isotérmica do ar dentro do Caisson seguindo Boyle-Mariotte ($p_0 \cdot V_0 = p_i \cdot V_i$) e pressão atmosférica $p_0 = 10^5$ Pa.

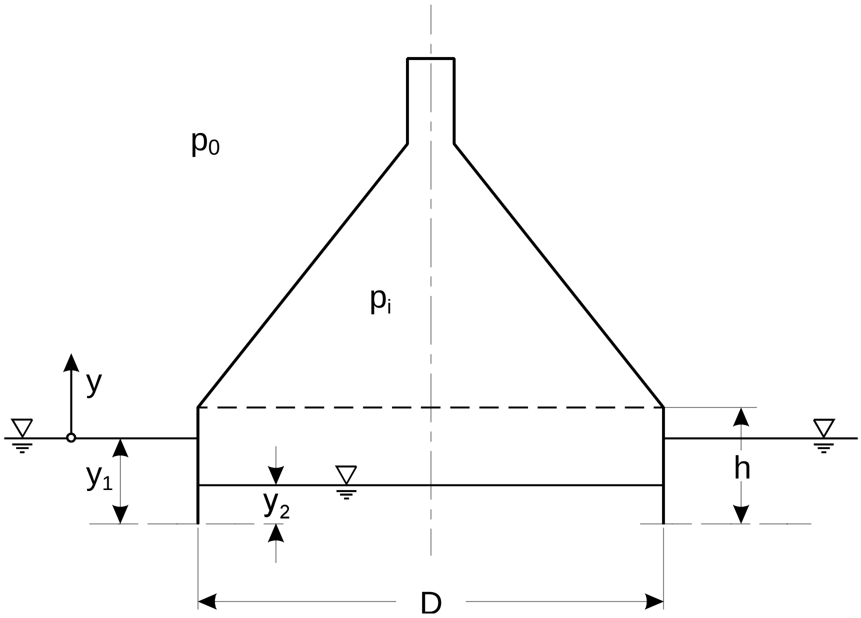


Fig. 1: Funil na água

<u>**Solução**</u>

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot y_1 = p_i + \rho \cdot g \cdot y_2$$

$$p_i - p_0 = \rho \cdot g \cdot (y_1 - y_2)$$

$$\sum F_y = -A + G = 0$$

$$A = \rho \cdot g \cdot (y_1 - y_2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = (p_i - p_0) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = G$$

$$p_i = p_0 + \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot D^2} = 10^5\ \text{Pa} + \frac{4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7\ \text{N}}{\pi \cdot (50\ \text{m})^2} = 107{,}64\ \text{kPa}$$

$$p_0 \cdot V_0 = p_i \cdot V_i \qquad \text{(Boyle – Mariotte)}$$

$$V_i = V_0 - \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot y_2 = V_0 \cdot \frac{p_0}{p_i}$$

$$y_2 = V_0 \cdot 4 \cdot \frac{1 - \frac{p_0}{p_i}}{\pi \cdot D^2} = 30000\ \text{m}^2 \cdot 4 \cdot \frac{1 - \frac{100}{107{,}39}}{\pi \cdot (50\ \text{m})^2} = 1{,}084\ \text{m}$$

$$y_1 = y_2 + \frac{p_i - p_0}{\rho \cdot g} = 1{,}084\ \text{m} + \frac{107{,}64\ \text{kPa} - 100\ \text{kPa}}{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}863\ \text{m}$$

2. A comporta (Fig. 2, largura B, estrutura sem água, peso desconsideravel) abre quando o nível de água se encontra exatamente na altura do eixo.
   a. Desenha qualitativamente na Fig. 2 as distribuições de pressão que atuam na comporta.
   b. Calcule o valor de K para que a comporta abra nesta condição.

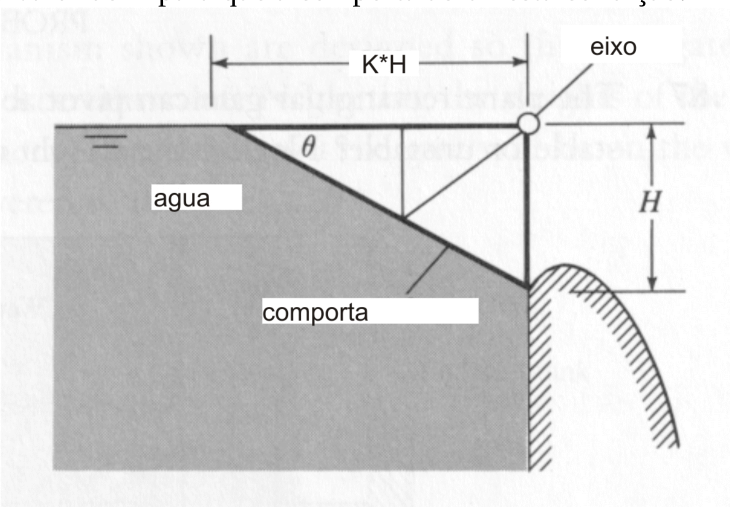


Fig. 2: Comporta

<u>Solução</u>

Gráfico: 5 ponto

$\Sigma M_{eixo} = 0 = H\,{}^{1}/_{2}\gamma * HB * {}^{2}/_{3}H - H\,{}^{1}/_{2}\gamma * KHB * {}^{1}/_{3}KH$

$K = 2^{1/2}$

3. Determine se os escoamentos na figura Fig. 3 são uniformes ou não (justifique com poucas palavras)

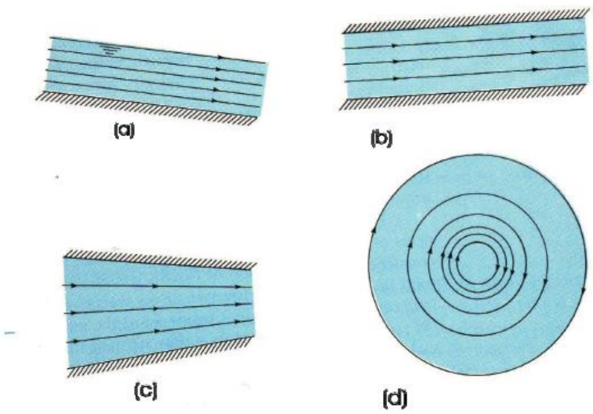


Fig. 3: Escoamentos

<u>Solução</u>

- a,b e d são uniformes: a variação da velocidade ao longo de uma linha corrente é zero $\partial v/\partial s = 0$

4. Os dois pistões do tanque com água na Fig. 4 se movimentam para esquerda. O pistão A (diâmetro D_A = 1m) se movimenta duas vezes mais rápido que pistão B (diâmetro = 2m).
   a. Determine e justifique se o nível no tanque aumenta, reduz ou fica constante.

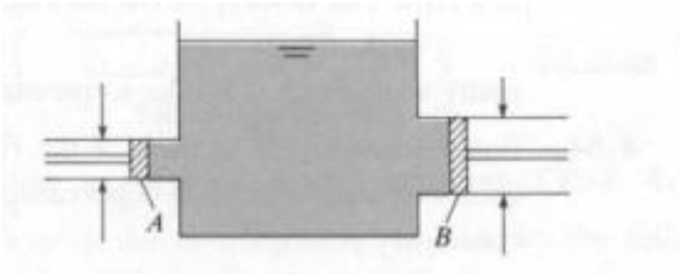


Fig. 4: Pistões

<u>Solução</u>

$V_A A_A$ - $V_A/2\ A_B + V_T A_T = 0$ (considerando um aumento do nível)

$-7/4 V_1 \pi + V_T A_T = 0$

$V_T > 0$ (confirmando a consideração)

Nível sobe.

5. Ar seco com massa especifica e velocidade v_1 entra em um duto de seção retangular h × b, cujo fundo é um reservatório de água como mostra a Fig. 5. Na saída, as distribuições de velocidade e concentração de vapor de água são dadas por:

$$v(y) \;=\; 4v_2\frac{y(h-y)}{h^2}, \qquad C(y) = C_0\frac{(h-y)}{h}.$$

Desprezando as variações de velocidade nas laterais,

a. Calcule a velocidade máxima na saída (seção 2) v_2 em função de v_1
b. Calcule o fluxo de massa J de vapor de água que evapora do reservatório em função de C_o, v_2, b e h.

Solução

(a) Este ítem diz respeito à velocidade do *fluido*, e portanto deve ser solucionado considerando-se a conservação da massa do fluido (7.30). Como o escoamento é permanente, o termo transiente é nulo. O termo devido aos fluxos advectivos têm componentes na entrada (S_1) e na saída (S_2) do duto, portanto:

$$\begin{aligned}\int_{SC} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS &= \int_{S_1} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS + \int_{S_2} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \\ &= -\rho v_1 bh + \int_0^h 4v_2\rho\frac{y(h-y)}{h^2}bdy = 0, \qquad (7.60)\end{aligned}$$

donde, após a integração, obtém-se:

$$v_2 = \frac{3v_1}{2}. \qquad (7.61)$$

Repare que $\dot{J}$ não contribui para o balanço de massa do fluido.

(b) A equação de balanço de massa de um soluto (no caso, vapor de água) é dada por (7.58). Como o problema é permanente, o termo transiente ($\partial/\partial t$) é nulo. A integral sobre a superfície de controle (fluxo advectivo) é:

$$\begin{aligned}\int_{S_c} C_A\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS &= \int_{S_1} C_A\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \\ &+ \int_{S_2} C_A\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS. \qquad (7.62)\end{aligned}$$

Como por hipótese o ar está seco na entrada do duto (S_1), a integral naquela superfície é nula ($C_A = 0$), e a integral de superfície em S_2 irá equilibrar o fluxo difusivo de massa do soluto:

$$\begin{aligned}\dot{J} &= \int_{S_2} C_A\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS = \frac{\rho 4C_0v_2b}{h^3}\int_0^h y(h-y)^2dy \\ &= \frac{1}{3}\rho C_0 v_2 bh. \qquad (7.63)\end{aligned}$$

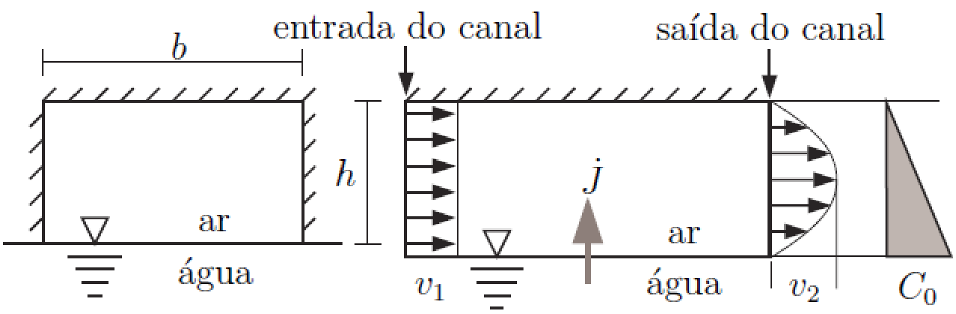


Fig. 5: Reservatório

6. Uma camada de um fluido num canal retangular escoa com profundidade constante h. A distribuição da velocidade é dada aproximadamente com as equações:

$$u = u(y) = C \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2\right],$$

$v = 0$, $w = 0$,

com a constante C tendo a dimensão de velocidade.

a. Calcule os componentes de aceleração.
b. O escoamento é permanente/não-permanente e uniforme/não-uniforme (justifique em poucas palavras)
c. O escoamento é rotacional? Se for, calcule o vetor rotacional.
d. Analise a deformação angular do escoamento.
e. Calcule a vazão.
f. Calcule a velocidade média.

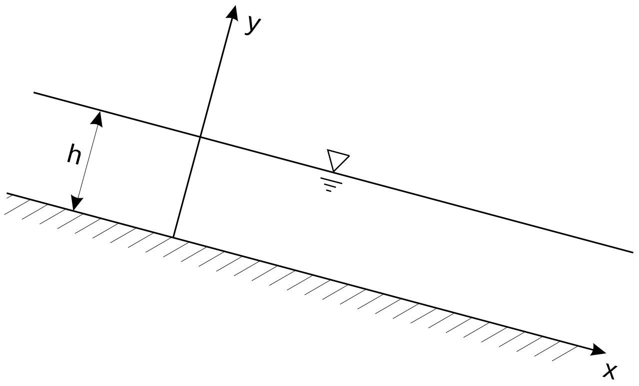


Fig. 6: Corte longitudinal de um canal

Solução:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \ \text{, da } \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x},\ v,\ w\ = 0$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \ \text{, da } \frac{\partial v}{\partial t},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ v,\ w = 0$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ \text{, da } \frac{\partial w}{\partial t},\ \frac{\partial w}{\partial x},\ v,\ w = 0$$

b) permanente ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$) uniforme ($\frac{\partial V}{\partial x} = 0$).

c)
vetor rotacional

$$2\,\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \ \text{, da } w, v\ = 0$$

$$2\,\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{, da } \frac{\partial u}{\partial z},\ w = 0$$

$$2\,\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - C \cdot \left[0 - 2 \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot \frac{-1}{h} \right]$$

$$\omega_z = C \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot \frac{-1}{h} = -\frac{u(h)}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Rotationsvektor:

$$\vec{\omega} = \left(\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z\right) = \left(0,\ 0,\ -\frac{u(h)}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right)$$

d):
deformação angular

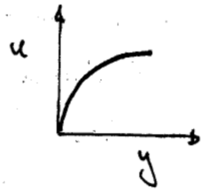
$$\vartheta_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 + 2 \cdot C \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot \frac{1}{h}$$

$$\vartheta_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 + 0 = 0$$

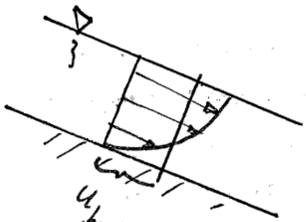
$$\vartheta_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 + 0 = 0$$

Aufgabe 3.1. Durchflußrate

a.) $u_{(0)} = 0$; $u(h) = u_{max}$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right) = -2 \cdot \frac{u_{max}}{h^2} < 0 \Rightarrow$ rechts - gekrümmt



$\Longrightarrow$ Geschwindigkeits-profil:



$u_{bulk} = \bar{u}$ (da stationär)

b.) Durchflussrate q:

$$q = \frac{1}{b} \cdot \int_A v \cdot dA = \int_0^h \frac{v \cdot b}{b} \cdot dy =$$

$$\int_0^h u_{max} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2\right] dy = \frac{2}{3}\, u_{max} \cdot h$$

c.) $$\bar{v} = \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{2}{3} \cdot \frac{u_{max} \cdot h \cdot b}{h \cdot b} = \frac{2}{3}\, u_{max}$$

Equações dadas:

Conservação de massa de fluido:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_c + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \bullet d\mathbf{A}) = 0$$

com VC: volume de controle, SC: superfície de controle, ρ: massa especifica, t: tempo, **V**: vetor velocidade, **A**: vetor área normal

Conservação de massa de um soluto

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho C_A}{\partial t} dV_c + \int_{SC} C_A \rho \mathbf{V} \bullet d\mathbf{A}) = 0$$

com C_a: concentração do soluto

Componentes da aceleração em escoamentos com vetor velocidade **V** = (u,v,w)

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

Componentes do vetor rotação **ω**

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Deformação

$$\vartheta_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\vartheta_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\vartheta_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$