Curitiba, 07.10.2016

# Avaliação 1
# Mecânica dos Fluidos Ambiental I

*Tobias Bleninger*
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Sala 9.22
Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ______________________________________________

Pontuação (preenchido pelo Professor):

| Questão | Pontos | Pontos totais | |
|---|---|---|---|
| 1 | | 15 | |
| 2 | | 15 | |
| 3 | | 25 | |
| 4 | | 15 | |
| 5 | | 20 | Nota |
| Soma | | 90 | |

**Questões**

1. (15 P) A comporta com altura h = 4m e largura b = 2m da Fig. 1 tem um peso W colocado em cima da comporta com distancia L = 5m do eixo. O peso da própria comporta pode ser desconsiderado, bem como as dimensões da vedação.
    a. Desenha qualitativamente na Fig. 1 a distribuição de pressão que atua na comporta.
    b. Qual peso W é necessário para que a comporta se abra automaticamente (força entre vedação e comporta desaparece) com a profundidade da água sendo d = 5m.

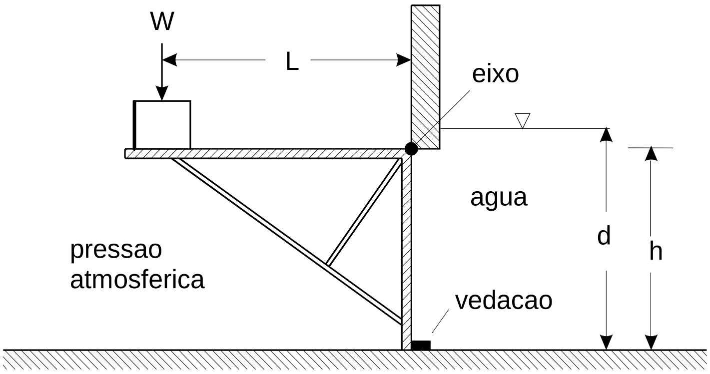

Fig. 1: Comporta

Solução

$$\sum M_G = W \cdot L - R_1 \cdot \frac{h}{2} - R_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot h$$

$$R_1 = h \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot (d-h)$$

$$R_2 = h \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2}$$

$$\sum M_G = W \cdot L - h \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot (d-h) \cdot \frac{h}{2} - h \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h = 0$$

$$W \cdot L = (h \cdot b \cdot \rho \cdot g) \cdot \left( (d-h) \cdot \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h \right)$$

$$W = 115{,}104\,\mathrm{kN}$$

2. (15P) Dois tubos, cada um com uma área de $A_1$ = 20cm² se juntam para formar um tubo só, com área de $A_2$ = 40cm². Os dois tubos levem água com temperaturas e concentrações diferentes ($T_1$ = 10°C, $C_1$ = 7µg/l e $T_2$ = 20°C, $C_2$ = 21µg/l). Considerando uma velocidade idêntica nos tubos da montante, qual é a temperatura e concentração no tubo de jusante? Considera uma isolação térmica perfeita dos tubos e uma substancia conservador e que o ponto da jusante é vários metros distante da junção dos tubos.

*Solução:*
permanente, incompressivel, $S_C$ longe da região de mistura
Temperatura: $0 = \rho c_p T_1 u_1 A_1 + \rho c_p T_2 u_2 A_2 - \rho c_p T_3 u_3 A_3$
$T_3 = (u_1 A_1 T_1 + T_2 u_2 A_2) / (u_3 A_3)$
$u_1 A_1 = u_2 A_2$ e $u_1 A_1 + u_2 A_2 = u_3 A_3$ segue $2 u_1 A_1 = u_3 2 A_1$ e $u_1 = u_3$
$T_3 = u_1 A_1 (T_1 + T_2) / (2 u_1 A_1) = 1/2\ (T_1 + T_2) = 15°C$
$C_3 = (u_1 A_1 C_1 + C_2 u_2 A_2) / (u_3 A_3) = u_1 A_1 (C_1 + C_2) / (2 u_1 A_1) = 1/2\ (C_1 + C_2) = 14µg/l$

3. (25 P) Água escoa num canal com largura W e profundidade D (Fig. 2). A distribuição de velocidade foi dada hipoteticamente com as equações:
    $u(y,z) = U_s(1-4y^2/W^2)(1-z^2/D^2)$

$v = w = 0$

com $U_S$ sendo a velocidade no meio do canal na superfície do fluido.

a. Calcule a vazão sendo uma função de $U_S$, D e W.
b. Calcule a velocidade média.
c. Calcule os componentes de aceleração.
d. Define o tipo do escoamento (permanente/não permanente, uniforme/não uniforme).
e. Verifique se o fluido neste escoamento é compressível/incompressível
f. O escoamento é rotacional? Se for, calcule o vetor rotacional.

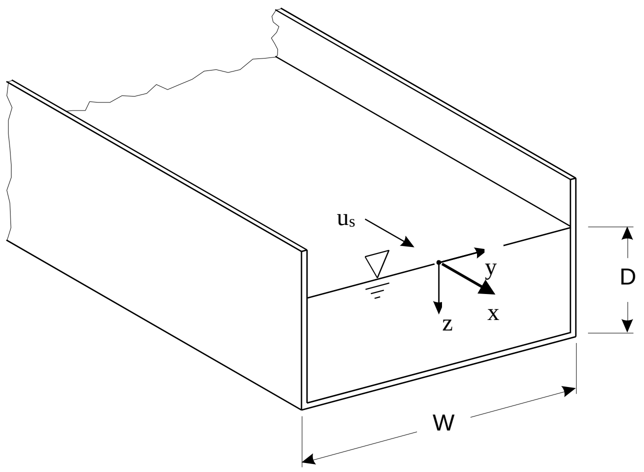


Fig. 2: Canal

Solução:

a:

$$Q = \int_A \vec{V}\, d\vec{A} = \iint_A V(x,y)\, dx\, dy = \int_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{y=0}^{D} V_s \cdot \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{y^2}{D^2}\right) dx\, dy$$

$$= V_s \int_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right)\left(\int_{y=0}^{D} \left(1 - \frac{y^2}{D^2}\right) dy\right) dx = V_s \int_{x=-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right)\left[y - \frac{y^3}{3\,D^2}\right]_{y=0}^{D} dx$$

$$= V_s \cdot \frac{2}{3} \cdot D \int_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right) dx = V_s \cdot \frac{2}{3} \cdot D \cdot \left[x - \frac{4\,x^3}{3\,W^2}\right]_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} =$$

$$= V_s \cdot \frac{2}{3} \cdot D \cdot 2 \cdot \left(\frac{W}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{W}{8}\right)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot V_s \cdot W \cdot D$$

b: $U_{med} = Q/(WD) = 4/9\ V_s$

c:

$u(y,z) = U_s(1-4y^2/W^2)(1-z^2/D^2)$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \ \text{, da } \frac{\partial u}{\partial t}, \ \frac{\partial u}{\partial x}, \ v, \ w \ = 0$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \ \text{, da } \frac{\partial v}{\partial t}, \ \frac{\partial v}{\partial x}, \ v, \ w = 0$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ \text{, da } \frac{\partial w}{\partial t}, \ \frac{\partial w}{\partial x}, \ v, \ w = 0$$

d) permanente ( $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ ) uniforme ( $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ ).

e)
du/dx + dv/dy + dw/z = 0 + 0 + 0 = 0 -⟶ incompressivel

f)
vetor rotacional

$$2\,\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \ , \ \text{da } w, v \ = 0$$

$$2\,\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ , \ \text{da } \frac{\partial u}{\partial z}, \ w = 0$$

$$2\,\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - C \cdot \left[ 0 - 2 \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot \frac{-1}{h} \right]$$

$$\omega_z = C \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot \frac{-1}{h} = -\frac{u(h)}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Rotationsvektor:

$$\vec{\omega} = \left(\omega_x, \ \omega_y, \ \omega_z\right) = \left(0, \ 0, \ -\frac{u(h)}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right)$$

4. (15 P) A Fig. 3 mostra um tubo em U aberto para a atmosfera de diâmetro interno igual a 1 cm, com mercúrio (massa especifica $\rho_m$ = 13550 kg/m³). Se 20 cm³ de água (massa especifica $\rho_a$ = 999 kg/m³) são inseridos no lado direito, calcule a nova configuração das alturas de mercúrio nos dois lados depois que o sistema entrar novamente em repouso.

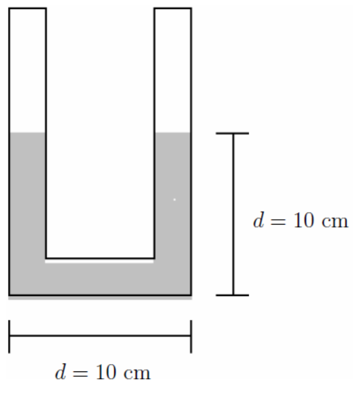


Fig. 3: Tubo U com mercúrio

5. (20 P) A Fig. 3 mostra um jato redondo (D = 15cm), livre no plano horizontal que é separado em dois. A forca F no separador (δ = 60°) foi medido com F = 25kN. Calcule a vazão do jato.

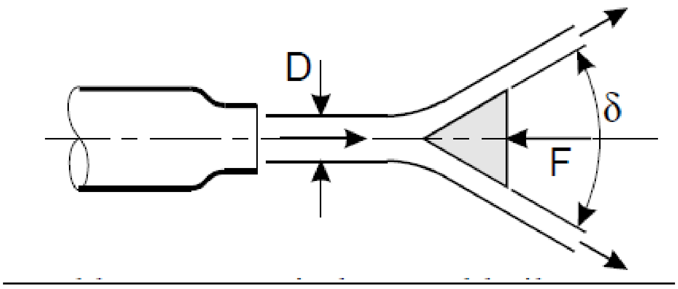


Fig. 4: Jato livre com separador

$$F_x = \sum_{K.O.} u \cdot (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{A})$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2}$$

$$-F = V \cdot (-\rho \cdot Q) + V \cdot \cos\frac{\delta}{2} \cdot (\rho \cdot Q)$$

$$= -V \cdot (1 - \cos\frac{\delta}{2}) \cdot \rho \cdot Q$$

$$= -\frac{1 - \cos\frac{\delta}{2}}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2} \cdot \rho \cdot Q^2$$

$$Q = \sqrt{\frac{F \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2}{(1 - \cos\frac{\delta}{2}) \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{25\ \mathrm{kN} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}15\ \mathrm{m})^2}{(1 - \cos 30^o) \cdot 10000\ \mathrm{kg/m^3}}} \qquad (1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$$

$$= \sqrt{\frac{25 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}15^2}{1 - \cos 30^o}} \cdot \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} = 1{,}816\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

**Equações dadas:**

Conservação de massa de fluido:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho dV_c + \int_{S_c} \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) = 0$ com $V_c$: volume de controle, $S_c$: superfície de controle, ρ: massa especifica, t: tempo, $\vec{V}$: vetor velocidade, $\vec{A}$: vetor área normal

Conservação de massa de um soluto:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} C_a\rho dV_c + \int_{S_c} C_a\rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{S_c} D\nabla(\mathrm{C_a}\rho) d\vec{A}$ com $C_a$: concentração do soluto e D: difusividade molecular

Conservação de calor:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} Tc_p\rho dV_c + \int_{S_c} Tc_p\rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{S_c} D_T\nabla(\mathrm{Tc_p}\rho) d\vec{A}$ com T: temperatura e $D_T$: difusividade térmica

Conservação de quantidade de movimento:
$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho\vec{V} dV_c + \int_{S_c} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot d\vec{A}) = \sum_{V_c}\overrightarrow{F_B} + \sum_{S_c}\overrightarrow{F_S}$ com $\overrightarrow{F_B}$ : forcas do corpo e $\overrightarrow{F_S}$: forcas superficiais

Equação de Bernoulli:
$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = const.$

Componentes da aceleração em escoamentos com vetor velocidade **V** = (u,v,w)

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}$$

Componentes do vetor rotação **ω**

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Deformação

$$\vartheta_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\vartheta_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\vartheta_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$