Curitiba, 18.12.2017

Avaliação Final
Mecânica dos Fluidos Ambiental I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Sala 9.22
Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

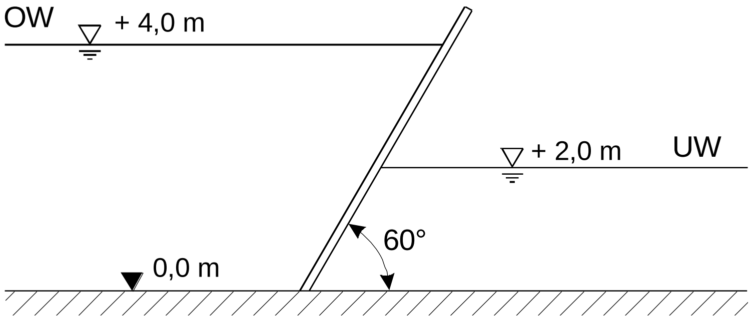
Nome: ______________________________

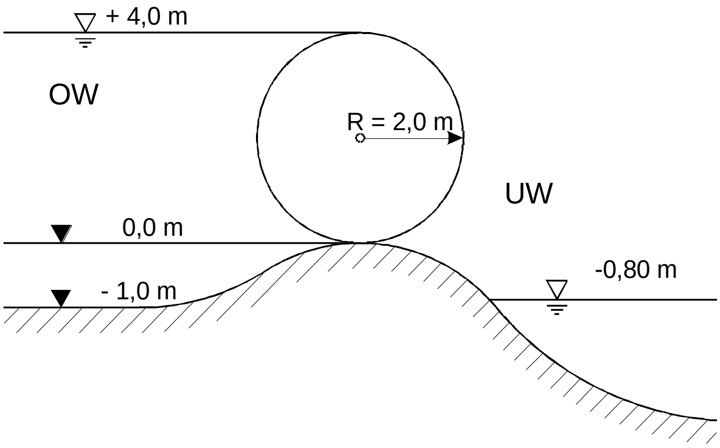
Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos	Pontos totais	
1		10	
2		30	
3		5	
4		10	
4		25	
5		10	Nota
Soma		90	

Questões

1. (14) As duas comportas nas figuras seguintes tem uma largura de 10m.
   a. Desenha qualitativamente a distribuição de pressão nas duas comportas.
   b. Calcule a força resultante na **primeira** comporta (magnitude, ponto de atuação e direção)





$$L = \frac{4{,}0\ \text{m}}{\sin 60^\circ} = 4{,}62\ \text{m}$$

$$R_1 = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\ \text{m} \cdot L = 906{,}45\ \text{kN}$$

$$R_2 = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{m} \cdot \frac{L}{2} = 226{,}60\ \text{kN}$$

$$R = R_1 - R_2 = 679{,}85\ \text{kN}$$

$$\sum M_A = R \cdot d = R_1 \cdot \frac{L}{3} - R_2 \cdot \frac{L}{6}$$

$$d = \frac{R_1 \cdot \frac{L}{3} - R_2 \cdot \frac{L}{6}}{R} = 1{,}80\ \text{m}$$

2. (16) Ar seco com velocidade v_1 entra em um duto de seção retangular h × b, cujo fundo é um reservatório de água como mostra a figura. Na saída, as distribuições de velocidade e concentração de vapor de água forma medidas e dados por:

$$v(y) \;=\; 4v_2\frac{y(h-y)}{h^2}, \qquad C(y) = C_0\frac{(h-y)}{h}.$$

Desprezando as variações de velocidade nas laterais,

   a. Calcule a velocidade máxima na saída (seção 2) v_2 em função de v_1

b. Calcule o fluxo de massa J de vapor de água que evapora do reservatório em função de C_o, v_2, b e h.

Solução

(a) Este ítem diz respeito à velocidade do *fluido*, e portanto deve ser solucionado considerando-se a conservação da massa do fluido (7.30). Como o escoamento é permanente, o termo transiente é nulo. O termo devido aos fluxos advectivos têm componentes na entrada (S_1) e na saída (S_2) do duto, portanto:

$$\begin{aligned}\int_{SC} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS &= \int_{S_1} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS + \int_{S_2} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \\ &= -\rho v_1 bh + \int_0^h 4v_2\rho\frac{y(h-y)}{h^2}bdy = 0, \qquad (7.60)\end{aligned}$$

donde, após a integração, obtém-se:

$$v_2 = \frac{3v_1}{2}. \qquad (7.61)$$

Repare que $\dot{J}$ não contribui para o balanço de massa do fluido.

(b) A equação de balanço de massa de um soluto (no caso, vapor de água) é dada por (7.58). Como o problema é permanente, o termo transiente ($\partial/\partial t$) é nulo. A integral sobre a superfície de controle (fluxo advectivo) é:

$$\begin{aligned}\int_{S_c} C_A\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS &= \int_{S_1} C_A\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \\ &+ \int_{S_2} C_A\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS. \qquad (7.62)\end{aligned}$$

Como por hipótese o ar está seco na entrada do duto (S_1), a integral naquela superfície é nula ($C_A = 0$), e a integral de superfície em S_2 irá equilibrar o fluxo difusivo de massa do soluto:

$$\begin{aligned}\dot{J} &= \int_{S_2} C_A\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS = \frac{\rho 4 C_0 v_2 b}{h^3}\int_0^h y(h-y)^2 dy \\ &= \frac{1}{3}\rho C_0 v_2 bh. \qquad (7.63)\end{aligned}$$

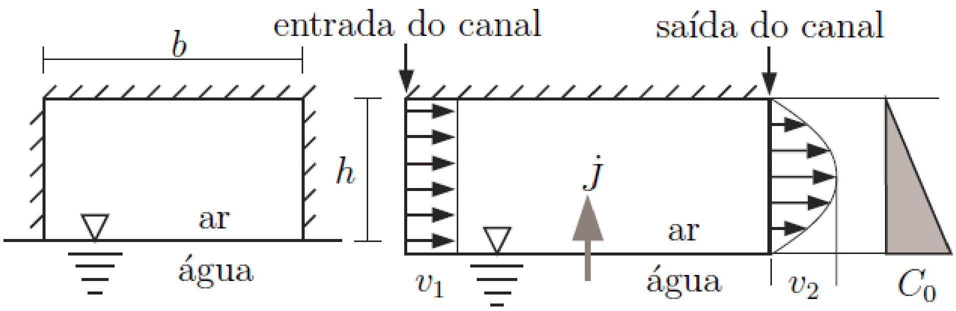
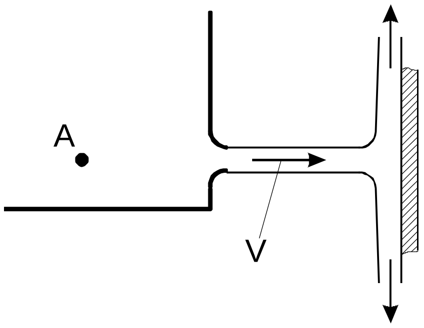


Fig. 1: Reservatório

3. (10P) Um jato de agua livre horizontal com área circular ($A = 0{,}01m^2$) bate numa placa.
   a. Qual velocidade é necessário para criar uma força na placa de F = 1000 N?



4.5.1:

$$\sum F_x = u\,(\rho\,\vec{V}\cdot\vec{A})$$

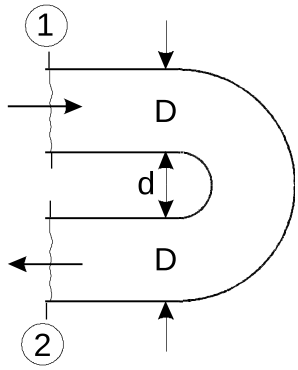
$$-F = V(-\rho V A)$$

$$F = \rho V^2 A$$

$$V = \sqrt{\frac{F}{\rho\cdot A}} = \sqrt{\frac{1000\,N}{1000\,\frac{kg}{m^3}\cdot 0{,}01m^2}} = 10\,\frac{m}{s}$$

F wirkt von der Platte auf das Fluid. Die Kraft vom Fluid auf die Platte ist entgegengesetzt gleich.

4. (10P) Numa tubulação curva na horizontal com diâmetro D = 30cm e volume $V = 0{,}1m^3$ e peso vazio de G = 500 N escoa uma vazão de $Q = 0{,}6m^3/s$ numa pressão de p = 120 kPa.
   a. Quais são os compenentes horizontais das forças para segurar esta tubulação?



$$\sum F_x = \sum_{K.O.} u(\rho \vec{V} \cdot \vec{A})$$

$$F_x + 2pA = V(-\rho Q) - V\rho Q$$

$$F_x = -2(pA + V\rho Q)$$

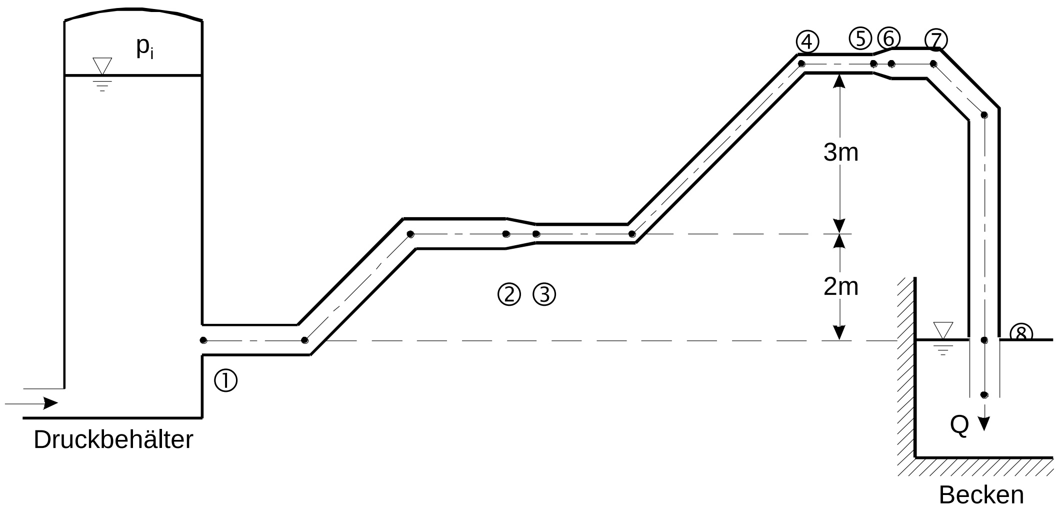
$$= -2\left(pA + \rho \frac{Q^2}{A}\right)$$

$$= -2\left(120\,\text{kPa} \cdot \frac{\pi}{4}(0{,}3\text{m})^2 + 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\frac{\left(0{,}6\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)^2}{\frac{\pi}{4}(0{,}3\text{m})^2}\right)$$

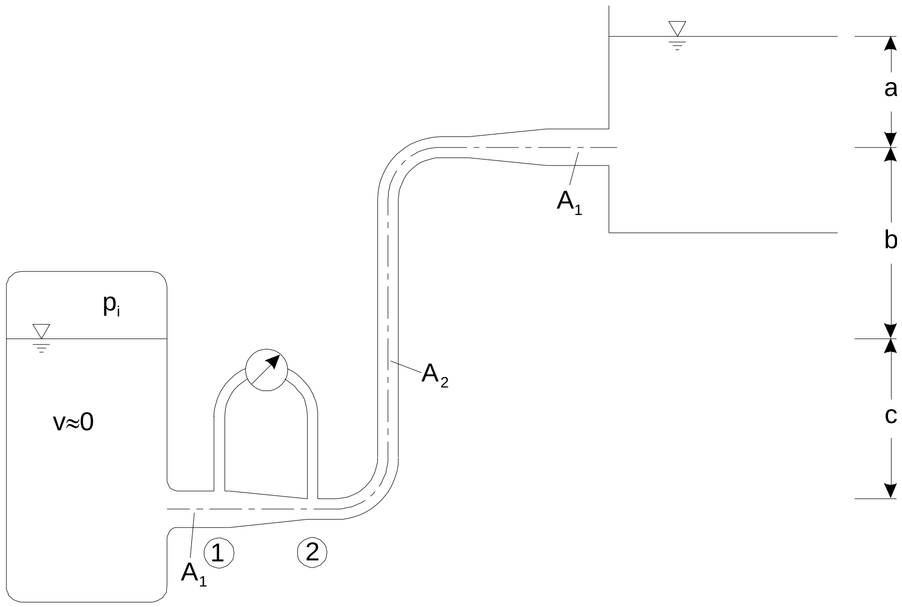
$$= -2\left(120 \cdot 1000\,\frac{\pi}{4}\,0{,}3^2 + 1000\,\frac{0{,}6^2}{\frac{\pi}{4}\,0{,}3^2}\right)\text{N} = -27{,}15\text{kN}$$

$F_y = 0$

5. (7P) Um grande tanque é alimentado por uma tubulação (A1=100cm², A3= 40cm², A6= 50cm²) vindo de um tanque de pressão grande. Atrito na tubulação pode ser desconsiderado.
   a. Qual é o ponto crítico para cavitação?
   b. Desenha a linha de energia e linha piezométrica.



6. (13P) Um grande tanque de pressão alimenta uma caixa de agua através uma tubulação (A1=1m², A2=1/√3m²). O manômetro entre a posição 1 e 2 mostra um diferença de altura de pressão de 2m. As distancias indicadas são a=5m, b=7,5m e c =6m. Atrito na tubulação pode ser desconsiderado.
   a. Qual é a vazão na tubulação?
   b. Desenha a linha de energia e linha piezométrica.



$$H = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$z_1 = z_2 = 0$$

$$p_1 - p_2 = \Delta p$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{\frac{\Delta p}{\gamma}}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2} = 3 \text{ m}$$

$$V_2 = 7{,}67 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot V_2 = 4{,}43 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = 1 \text{ m}$$

$$Q = V_1 A_1 = 4{,}43 \, \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

7. (7 P) O escoamento da **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** pode ser descrito com a equação

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Qual é a vazão se o canal tem a largura de B = 5 m e profundidade de h = 2 m e a velocidade máxima de u_{max} = 3 m/s?

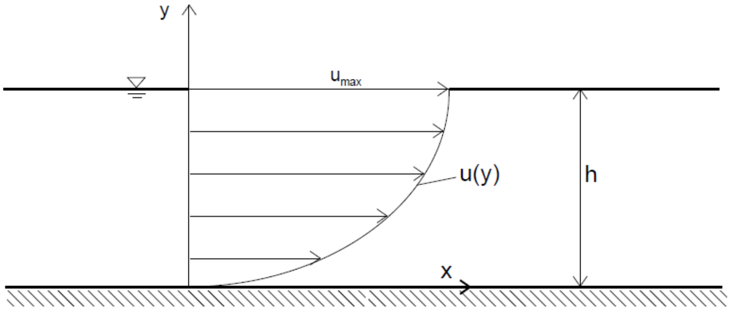


Fig. 2: Escoamento

Solucao:

$$Q = \int_A u dA = \int_0^h u_{max}(\frac{y}{h})^{\frac{1}{2}} \cdot B\, dy = \frac{u_{max}B}{h^{\frac{1}{2}}} \int_0^2 y^{\frac{1}{2}}\, dy = \frac{5\ m \cdot 3\ m/s}{2^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = 20\ \frac{m^3}{s}$$

8. (15 P) Um liquido viscoso com massa especifica e viscosidade constante escoa entre duas placas fixas devido a gravidade. As placas tem a distancia de 2b e o escoamento é totalmente desenvolvido com a componente de velocidade w em direcao do eixo z. O escoamento assim somente depende de x ($\vec{U}$ = [0, 0, w(x)]). Não há gradientes de pressão no sistema. Determine a equação do perfil de velocidade e desenha o mesmo na Fig. 3.

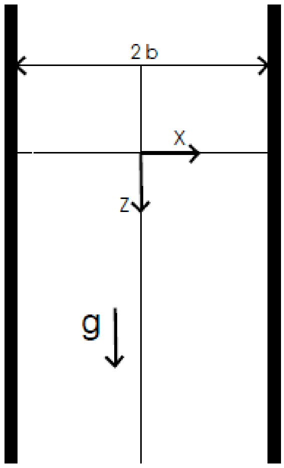


Fig. 3: Escoamento entre placas

Solucao:

x-Komponente der Navier-Stokes-Gleichung:

$$\underbrace{\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})}_{=0}=\underbrace{\rho g_x}_{=0}-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0}+\mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{=0}\right)$$

y-Komponente der Navier-Stokes-Gleichung:

$$\underbrace{\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})}_{=0}=\underbrace{\rho g_y}_{=0}-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{=0}+\mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{=0}\right)$$

z-Komponente der Navier-Stokes-Gleichung:

$$\underbrace{\rho(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})}_{=0}=\rho g_z-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{=0}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}_{=0}\right)$$

Lediglich bleiben nur noch die folgenden Terme übrig:

$$\rho g_z+\mu\frac{d^2w}{dx^2}=0\Rightarrow\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{\rho g_z}{\mu}$$

wobei die partiellen Ableitungen ($\frac{\partial}{\partial x}$) durch *totalen* Ableitungen ersetzt wurden, da w nur von der Variabel x abhängt.

$$mit\ g_z=g:\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{\rho g}{\mu}$$

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{\rho g x}{\mu}+C_1$$

$$w=-\frac{\rho g x^2}{2\mu}+C_1x+C_2$$

$$w(-b)=0\ ;\ w(b)=0$$

$$\Rightarrow 0=\underbrace{-\frac{\rho g b^2}{2\mu}+C_1b+C^2}_{+b\ eingesetzt}=\underbrace{-\frac{\rho g b^2}{2\mu}-C_1b+C_2}_{-b\ eingesetzt}$$

$$\Rightarrow C_1=0\ ;\ C_2=\frac{\rho g b^2}{2\mu}$$

$$\Rightarrow w=\frac{\rho g}{2\mu}(b^2-x^2)$$

9. (15 P) Uma bola esférica foi analisada em escala 1:3 num canal, sendo arrastado em baixo da água. O modelo tem o diâmetro d = 0,3 m e foi arrastado com a velocidade de V = 1,5 m/s na água e foi medida uma força de arrasto de F = 90 N. Faca uma analise dimensional e define os parâmetros adimensionais obtidos. Qual força resulta do protótipo

em realidade em ar (podem ser utilizados estimativas apropriadas para os parâmetros característicos dos fluidos)?

Solucao

da analise dimensional: coeficiente de resistência c~ $\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f(Re)$

$$Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

Semelhanca Reynolds

$$Re_r = \frac{Re_m}{Re_p} = \frac{V_r \cdot L_r}{\nu_r} \overset{!}{=} 1$$

$$V_r = \frac{\nu_r}{L_r}$$

$$c_r = \frac{\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_m}{\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_p} = \frac{F_m}{F_p} \cdot \frac{1}{\rho_r V_r^2 L_r^2} \overset{!}{=} 1$$

$$F_p = \frac{F_m}{\rho_r V_r^2 L_r^2} = \frac{F_m}{\rho_r \left(\frac{\nu_r}{L_r}\right)^2 L_r^2} = \frac{F_m}{\rho_r \nu_r^2}$$

F_m = 90 N

$$\rho_r = \frac{\rho_m}{\rho_p} = 800 \text{ bei } 15°C$$

$$\nu_r = \frac{\nu_m}{\nu_p} = 0{,}08 \text{ bei } 15°C$$

$$F_p = \frac{F_m}{\rho_r \nu_r^2} = \frac{90\,N}{800 \cdot 0{,}08^2} = 17{,}57\,N$$

Equações dadas:

Conservação de massa de fluido:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho dV_c + \int_{S_c} \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) = 0$ com V_c: volume de controle, S_c: superfície de controle, ρ: massa especifica, t: tempo, $\vec{V}$: vetor velocidade, $\vec{A}$: vetor área normal

Conservação de massa de um soluto:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} C_a \rho dV_c + \int_{S_c} C_a \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{S_c} D\nabla(C_a\rho)d\vec{A}$ com C_a: concentração do soluto e D: difusividade molecular

Conservação de calor:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} Tc_p \rho dV_c + \int_{S_c} Tc_p \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{S_c} D_T\nabla(Tc_p\rho)d\vec{A}$ com T: temperatura e D_T: difusividade térmica

Componentes da aceleração em escoamentos com vetor velocidade **V** = (u,v,w)

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

Componentes do vetor rotação $\boldsymbol{\omega}$

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Deformação

$$\vartheta_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\vartheta_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\vartheta_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Equação de Bernoulli:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = const.$$

Equação de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla} p + \rho \mathrm{g} + \mu \left[\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \right) \right]$$