Curitiba, 20.04.2018

Avaliação 1
Mecânica dos Fluidos Ambiental I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Sala 9.22
Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

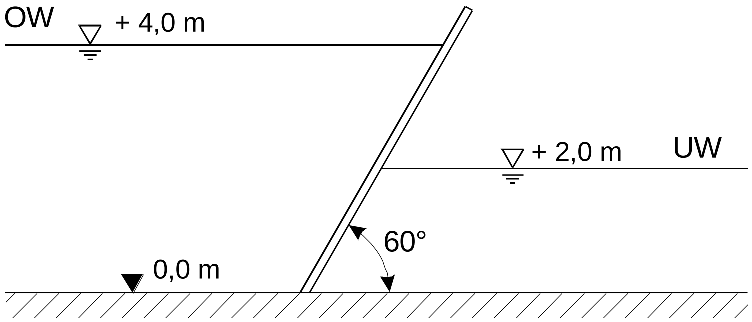
Nome: ____

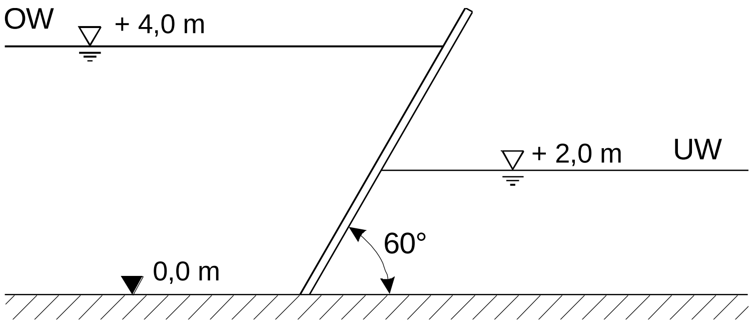
Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos	Pontos totais	
1			
2			
3			
4			
4			
5			Nota
Soma			

Questões

1. (20) A comporta na figura seguinte tem uma largura de 10m.
   a. Desenha qualitativamente a distribuição de pressão na comporta (figura superior: distribuição perpendicular a comporta, figura inferior: distribuição horizontal e vertical).
   b. Calcule a força resultante na comporta (magnitude, ponto de atuação e direção) usando ambas distribuições do item a) e compare.





$$L = \frac{4{,}0\ \mathrm{m}}{\sin 60^\circ} = 4{,}62\ \mathrm{m}$$

$$R_1 = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\ \mathrm{m} \cdot L = 906{,}45\ \mathrm{kN}$$

$$R_2 = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot \frac{L}{2} = 226{,}60\ \mathrm{kN}$$

$$R = R_1 - R_2 = 679{,}85\ \mathrm{kN}$$

$$\sum M_A = R \cdot d = R_1 \cdot \frac{L}{3} - R_2 \cdot \frac{L}{6}$$

$$d = \frac{R_1 \cdot \frac{L}{3} - R_2 \cdot \frac{L}{6}}{R} = 1{,}80\ \mathrm{m}$$

2. (10) Os dois pistões do tanque com água se movimentam para esquerda. O pistão A (diâmetro D_A = 1m) se movimenta duas vezes mais rápido que pistão B (diâmetro = 2m).
   a. Determine e justifique analiticamente se o nível no tanque aumenta, reduz ou fica constante.

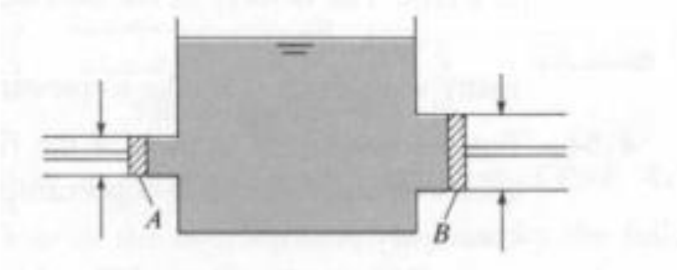


Fig. 1: Pistões

Solução
$V_A A_A - V_A/2\ A_B + V_T A_T = 0$ (considerando um aumento do nível)
$-7/4 V_1 \pi + V_T A_T = 0$
$V_T > 0$ (confirmando a consideração)
Nível sobe.

3. (10) Água escoa num canal com largura W e profundidade D (Fig. 2). A distribuição de velocidade foi dada com as equações:
   $u(y,z) = U_s(1 - 4y^2/W^2)(1 - z^2/D^2)$
   $v = w = 0$

com U_S sendo a velocidade no meio do canal na superfície do fluido.

   a. Calcule a vazão sendo uma função de U_S, D e W.
   b. Calcule a velocidade média.
   c. Calcule os componentes de aceleração.
   d. Define o tipo do escoamento (permanente/não permanente, uniforme/não uniforme).
   e. Verifique se o fluido neste escoamento é compressível/incompressível
   f. O escoamento é rotacional? Se for, calcule o vetor rotacional.

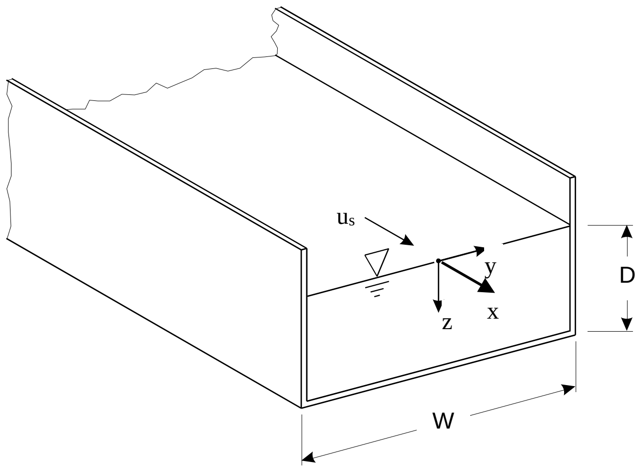


Fig. 2: Canal

Solução:
a:

$$Q = \int_A \vec{V}\, d\vec{A} = \iint_A V(x,y)\, dx\, dy = \int_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{y=0}^{D} V_s \cdot \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{y^2}{D^2}\right) dx\, dy$$

$$= V_s \int_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right)\left(\int_{y=0}^{D} \left(1 - \frac{y^2}{D^2}\right) dy\right) dx = V_s \int_{x=-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right)\left[y - \frac{y^3}{3\,D^2}\right]_{y=0}^{D} dx$$

$$= V_s \cdot \frac{2}{3} \cdot D \int_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \left(1 - \frac{4\,x^2}{W^2}\right) dx = V_s \cdot \frac{2}{3} \cdot D \cdot \left[x - \frac{4\,x^3}{3\,W^2}\right]_{x=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} =$$

$$= V_s \cdot \frac{2}{3} \cdot D \cdot 2 \cdot \left(\frac{W}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{W}{8}\right)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot V_s \cdot W \cdot D$$

b: $U_{med} = Q/(WD) = 4/9\ V_s$

c:
$u(y,z) = U_s(1\text{-}4y^2/W^2)(1\text{-}z^2/D^2)$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \ \text{, da}\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x},\ v,\ w\ = 0$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \ \text{, da}\ \frac{\partial v}{\partial t},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ v,\ w = 0$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ \text{, da}\ \frac{\partial w}{\partial t},\ \frac{\partial w}{\partial x},\ v,\ w = 0$$

d) permanente ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$) uniforme ($\frac{\partial V}{\partial x} = 0$).

e)
du/dx + dv/dy + dw/z = 0 + 0 + 0 = 0 -⟶ incompressivel

f)
vetor rotacional

$$2\,\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \ \text{,}\ \ \text{da w, v}\ = 0$$

$$2\,\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{,}\ \ \text{da}\ \frac{\partial u}{\partial z},\ w = 0$$

$$2\,\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - C \cdot \left[0 - 2 \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot \frac{-1}{h}\right]$$

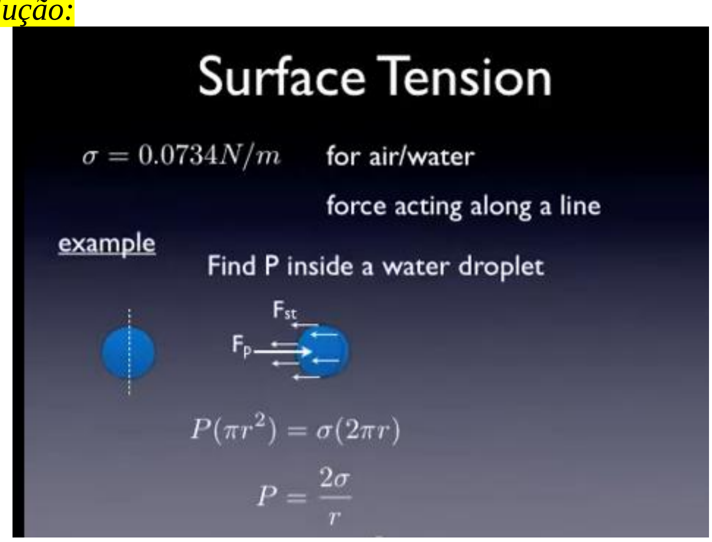
$$\omega_z = C \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot \frac{-1}{h} = -\frac{u(h)}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Rotationsvektor:

$$\vec{\omega} = \left(\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z\right) = \left(0,\ 0,\ -\frac{u(h)}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right)$$

4. (4P) Calcule a pressão dentro de uma gota (forma esférica) de água causada pela tensão superficial (água/ar: σ = 0,0734 N/m) para dois diâmetros diferentes.

Solução:



5. (4P) Determine se os escoamentos na figura Fig. 3 são uniformes ou não (justifique com poucas palavras)

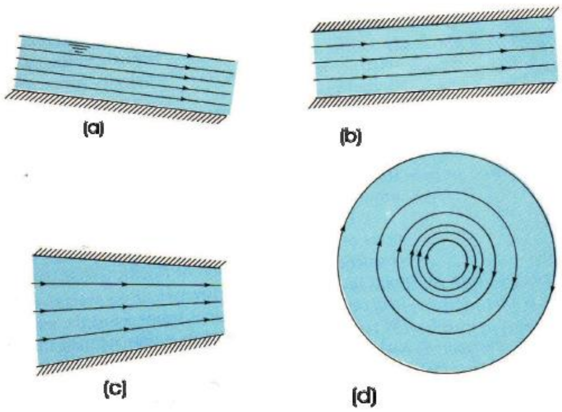


Fig. 3: Escoamentos

Solução

- a,b e d são uniformes: a variação da velocidade ao longo de uma linha corrente é zero $\partial v/\partial s = 0$

6. (12 P) Um Caisson (tanque cilíndrico de forma de funil, Fig. 4, com volume vazio $V_0 = 30000\ m^3$, peso $G = 1{,}5 \cdot 10^4$ kN, diâmetro D = 50 m, altura h = 5 m) com abertura na parte inferior é colocado na água.
   a. Calcule a profundidade y_1 que o Caisson entra na água, considerando uma compressão isotérmica do ar dentro do Caisson seguindo Boyle-Mariotte ($p_0 \cdot V_0 = p_i \cdot V_i$) e pressão atmosférica $p_0 = 10^5$ Pa.

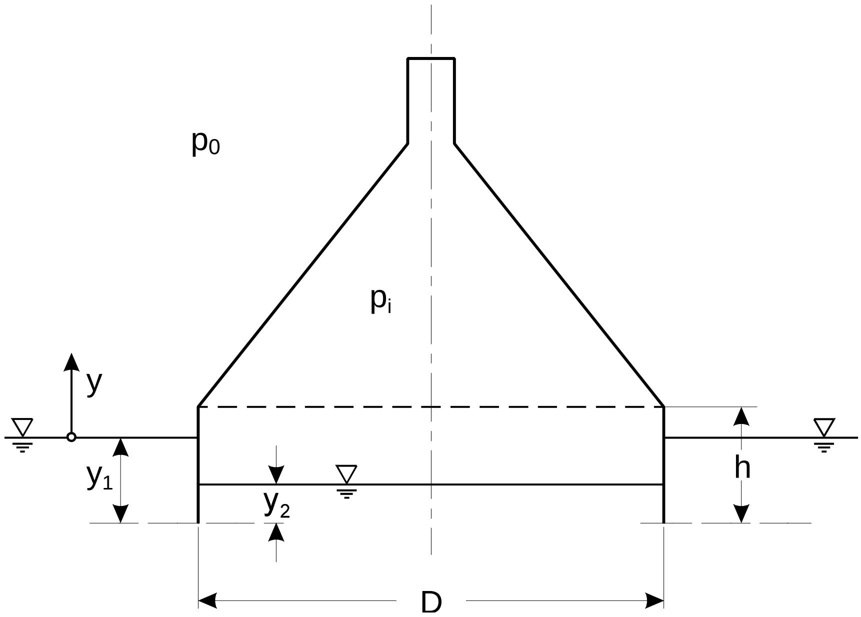


Fig. 4: Funil na água

Solução

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot y_1 = p_i + \rho \cdot g \cdot y_2$$
$$p_i - p_0 = \rho \cdot g \cdot (y_1 - y_2)$$

$$\sum F_y = -A + G = 0$$

$$A = \rho \cdot g \cdot (y_1 - y_2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = (p_i - p_0) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = G$$

$$p_i = p_0 + \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot D^2} = 10^5\ \text{Pa} + \frac{4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7\ \text{N}}{\pi \cdot (50\ \text{m})^2} = 107{,}64\ \text{kPa}$$

$$p_0 \cdot V_0 = p_i \cdot V_i \qquad \text{(Boyle – Mariotte)}$$

$$V_i = V_0 - \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot y_2 = V_0 \cdot \frac{p_0}{p_i}$$

$$y_2 = V_0 \cdot 4 \cdot \frac{1 - \frac{p_0}{p_i}}{\pi \cdot D^2} = 30000\ \text{m}^2 \cdot 4 \cdot \frac{1 - \frac{100}{107{,}39}}{\pi \cdot (50\ \text{m})^2} = 1{,}084\ \text{m}$$

$$y_1 = y_2 + \frac{p_i - p_0}{\rho \cdot g} = 1{,}084\ \text{m} + \frac{107{,}64\ \text{kPa} - 100\ \text{kPa}}{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}863\ \text{m}$$

7. (5P) Um fluido incompressível escoa em regime permanente na junção de tubulação ilustrado na Fig. 5. Qual é a magnitude e orientação da velocidade V_4?

Dado:

Área $A_1 = 4{,}5\ m^2$	Velocidade	$V_1 = 2{,}0\ m/s$
Área $A_2 = 3{,}0\ m^2$	Velocidade	$V_2 = 1{,}0\ m/s$
Área $A_3 = 2{,}0\ m^2$	Velocidade	$V_3 = 3{,}0\ m/s$

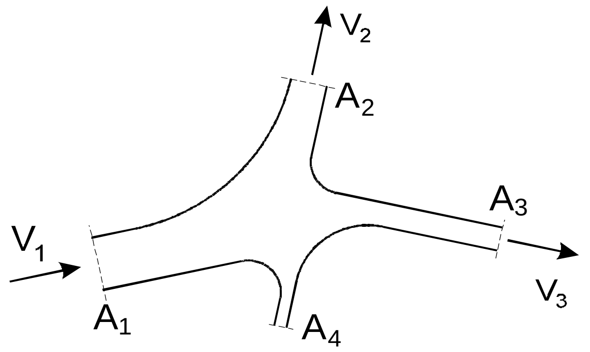


Fig. 5: Junção de tubulações

Solução

Equação da continuidade

$$-V_1 \cdot A_1 + V_2 \cdot A_2 + V_3 \cdot A_3 + V_4 \cdot A_4 = 0$$

$$V_4 = V_1 \cdot \frac{A_1}{A_4} - V_2 \cdot \frac{A_2}{A_4} - V_3 \cdot \frac{A_3}{A_4} =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{4{,}5}{1{,}0} - 1 \cdot \frac{3{,}0}{1{,}0} - 3 \cdot \frac{2{,}0}{1{,}0}\right) \frac{m}{s} = 0\ \frac{m}{s}$$

8.

9. (10P) A comporta (Fig. 6, largura B, estrutura sem água, peso desconsideravel) abre quando o nível de água se encontra exatamente na altura do eixo.
   a. Desenha qualitativamente na Fig. 6 as distribuições de pressão que atuam na comporta.
   b. Calcule o valor de K para que a comporta abra nesta condição.

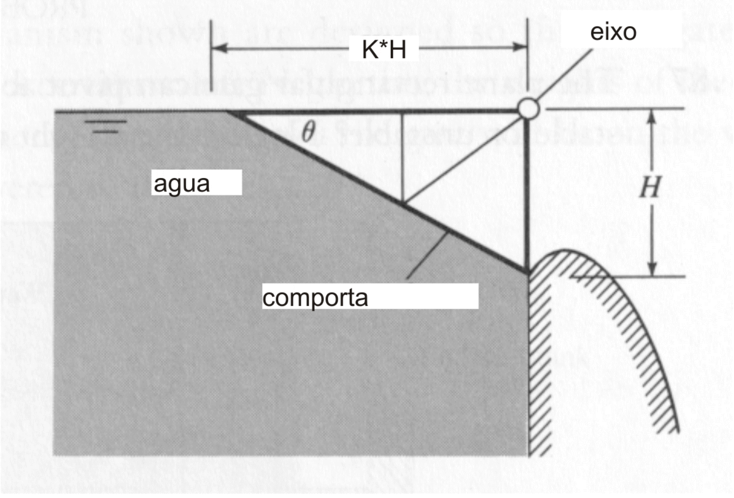


Fig. 6: Comporta

Solução

Gráfico: 5 ponto
$\Sigma M_{eixo} = 0 = H^1/_2\gamma * HB *^2/_3 H - H^1/_2\gamma * KHB *^1/_3 KH$
$K = 2^{1/2}$

10.

11. (5 P) A Fig. 7 mostra um tubo em U aberto para a atmosfera de diâmetro interno igual a 1 cm, com mercúrio (massa especifica ρ_m = 13550 kg/m³). Se 20 cm³ de água (massa especifica ρ_a = 999 kg/m³) são inseridos no lado direito, calcule a nova configuração das alturas de mercúrio nos dois lados depois que o sistema entrar novamente em repouso.

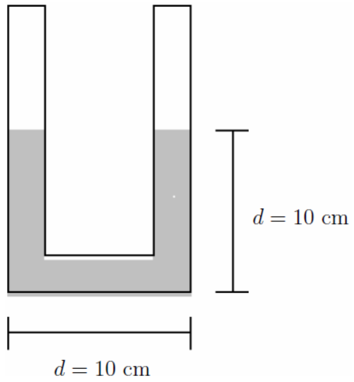


Fig. 7: Tubo U com mercúrio

12. (10P) O cilindro feito de dois materiais (Fig. 9, $\rho_1 = 2{,}9*\rho_{agua}$ e $\rho_2 = 0{,}2*\rho_{agua}$) é colocado no reservatório da Fig. 8 com estratificação discreta de dois fluidos (ρ_{agua} = 1000kg/m³ e ρ_{oleo} = 900kg/m³).
    a. Calcule a profundidade em que o cilindro flutua dentro do reservatório.
    b. Determine se o cilindro flutua com estabilidade ou não e justifique em palavras (qualitativamente, poucas palavras) a sua resposta

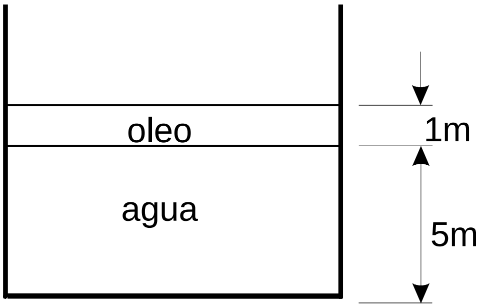


Fig. 8: Reservatório com água e óleo

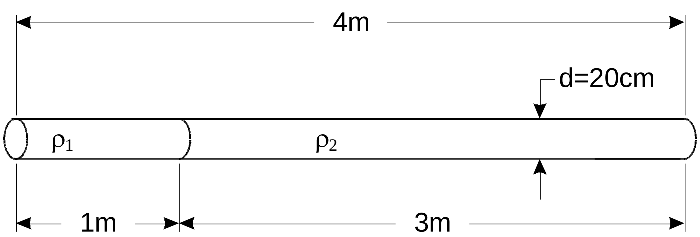


Fig. 9: Cilindro maciço de dois materiais

Solução

$$\sum F_z = p \cdot A - W$$

Pressão em profundidade t:

$$p = \rho_{Öl} \cdot g \cdot 1\,m + \rho_{Wasser} \cdot g \cdot t$$

Peso do cilindro:

$$W = (\rho_1 \cdot g \cdot 1\,m + \rho_2 \cdot g \cdot 3\,m) \cdot A$$

$$\sum F_z = (\rho_{Öl} \cdot g \cdot 1\,m + \rho_{Wasser} \cdot g \cdot t) \cdot A - (\rho_1 \cdot g \cdot 1\,m + \rho_2 \cdot g \cdot 3\,m) \cdot A = 0$$

$$t = \frac{\rho_1 \cdot 1\,m + \rho_2 \cdot 3\,m - \rho_{Öl} \cdot 1\,m}{\rho_{Wasser}} = 2{,}70\ m$$

13.

Equações dadas:

Conservação de massa de fluido:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho dV_c + \int_{S_c} \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) = 0$ com V_c: volume de controle, S_c: superfície de controle, ρ: massa especifica, t: tempo, $\vec{V}$: vetor velocidade, $\vec{A}$: vetor área normal

Conservação de massa de um soluto:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} C_a \rho dV_c + \int_{S_c} C_a \rho(\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{S_c} D\nabla(C_a\rho) d\vec{A}$ com C_a: concentração do soluto e D: difusividade molecular

Componentes da aceleração em escoamentos com vetor velocidade **V** = (u,v,w)

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

Componentes do vetor rotação $\boldsymbol{\omega}$

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Deformação

$$\vartheta_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\vartheta_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\vartheta_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$