EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: Conservação da massa e conservação da massa de um soluto

Gabriela Gomes Nogueira Sales

Orientador: Prof. Dr. Tobias Bleninger

Maio de 2019

Teorema do transporte de Reynolds

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \eta\rho dV + \int_{S_c} \eta\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS$$

REVISÃO – Princípios de conservação: equações integrais

- Balanço de massa ($\eta = 1,\ N = M$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS = 0$$

- Balanço de massa de um soluto ($\eta = C_A,\ N = M_A$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} C_A \rho dV + \int_{S_c} C_A \rho \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS = -\int_{S_c} \left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\right) dS$$

$$\mathbf{j} \;=\; -\rho D_{AB} \boldsymbol{\nabla} C_A$$

REVISÃO – Princípios de conservação: equações integrais

- Balanço de quantidade de movimento ($\eta = v,\ N = I$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \mathbf{v}\rho dV + \int_{S_c} \mathbf{v}\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS = \int_{V_c} \rho\mathbf{g} dV + \int_{S_c} \left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\right) dS$$

- Balanço de energia ($\eta = e,\ N = E$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} e\rho dV + \int_{S_c} e\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS = -\int_{S_c} \left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\right) dS + \int_{S_c} \left[\left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\mathbf{v}\right] dS$$

$$\mathbf{T} = \left[-p + \frac{2}{3}\rho\nu\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\right)\right]\mathbf{I} + 2\rho\nu\mathbf{D} \qquad \mathbf{q} = -\rho c_p \alpha \boldsymbol{\nabla} T$$

CONSERVAÇÃO DA MASSA DE UM SOLUTO

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} C_A \rho dV + \int_{S_c} C_A \rho \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS = -\int_{S_c} \left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\right) dS$$

- Teorema da divergência $\Rightarrow$ $\mathbf{f} = C_A \rho \mathbf{v}$ $\quad$ $\mathbf{f} = \mathbf{j}$

$$\int_{V_c} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(C_A \rho\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(C_A \rho \mathbf{v}\right) + \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j}\right)\right] dV = 0$$

CONSERVAÇÃO DA MASSA DE UM SOLUTO

- Teorema da localização:

$$\frac{\partial}{\partial t}(C_A\rho) + \nabla \cdot (C_A\rho\mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{j}) = 0$$

$$\rho\frac{\partial C_A}{\partial t} + \underbrace{C_A\frac{\partial \rho}{\partial t} + C_A\boldsymbol{\nabla}.(\rho\boldsymbol{v})}_{CM\,=\,0} + \rho\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}C_A = -\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j}$$

CONSERVAÇÃO DA MASSA DE UM SOLUTO

UFPR

- Usando a equação constitutiva para o fluxo de massa:

$$\rho \frac{\partial C_A}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla} C_A = -\boldsymbol{\nabla}.(-\rho D_{AB} \boldsymbol{\nabla} C_A)$$

$$\rho \left(\frac{\partial C_A}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla} C_A \right) = \boldsymbol{\nabla}.(\rho D_{AB} \boldsymbol{\nabla} C_A)$$

Operador laplaciano

$$\rho \frac{D C_A}{D t} = \boldsymbol{\nabla}(\rho D_{AB}).\boldsymbol{\nabla} C_A + \rho D_{AB} \boldsymbol{\nabla}^2 C_A$$

CONSERVAÇÃO DA MASSA DE UM SOLUTO

Simplificações:

- Se D_{AB} é uniforme e constante:

$$\rho \frac{DC_A}{Dt} = D_{AB}(\boldsymbol{\nabla}\rho . \boldsymbol{\nabla}C_A) + \rho D_{AB}\boldsymbol{\nabla}^2 C_A$$

- Se o escoamento é permanente:

$$\rho\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}C_A = \boldsymbol{\nabla}(\rho D_{AB}).\boldsymbol{\nabla}C_A + \rho D_{AB}\boldsymbol{\nabla}^2 C_A$$

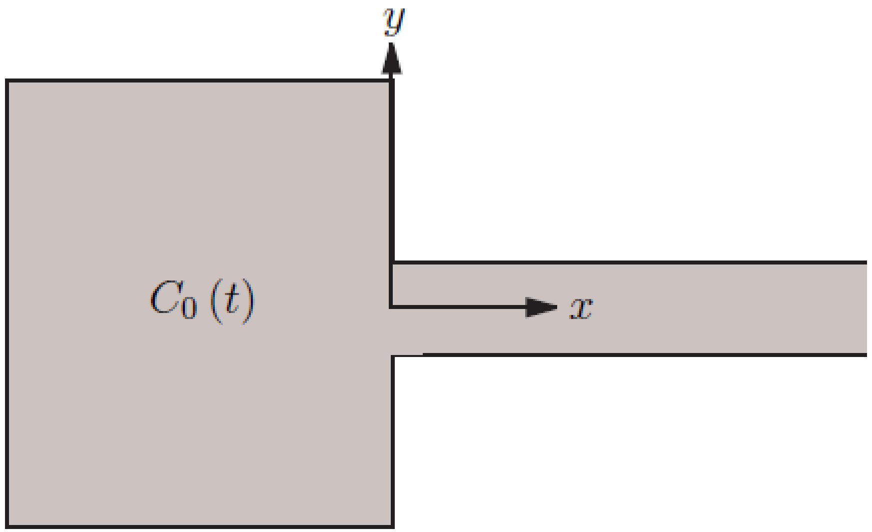
- Se o fluido é incompressível (ρ uniforme no tempo e no espaço):

$$\rho \frac{DC_A}{Dt} = \rho D_{AB}\boldsymbol{\nabla}^2 C_A$$

$$\frac{DC_A}{Dt} = D_{AB}\boldsymbol{\nabla}^2 C_A$$

EXEMPLO – Difusão pura em material semi-infinito

Considere um canal semi-infinito com água pura em repouso, que subtamente é colocado em contato com um reservatório de água salgada com concentração de sal que pode variar com o tempo $C_0(t)$. A difusividade sal-água é D_s. Admitindo que o gradiente de pressão entre o reservatório e o canal e a componente x da força da gravidade, assim como a viscosidade, são desprezíveis, qual será a concentração dentro do canal em função de x e t?



EXEMPLO – Difusão pura em material semi-infinito

- Nenhum forçante no problema ⇨ partículas de água permanecem com velocidade constante no tubo igual a zero

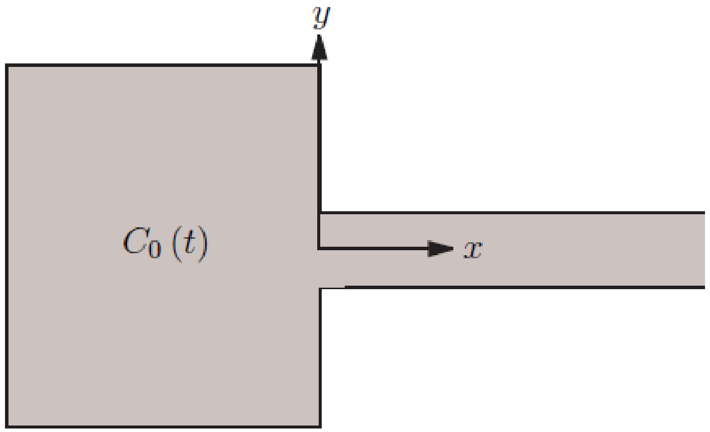
- A equação de transporte de sal é dada pela equação de conservação da massa de um soluto:

$$\rho \frac{\partial C_A}{\partial t} + \rho \cancelto{0}{\boldsymbol{v}} . \boldsymbol{\nabla} C_A = \boldsymbol{\nabla} . (\rho \cancelto{0}{D_{AB}}) . \boldsymbol{\nabla} C_A + \rho D_{AB} \boldsymbol{\nabla}^2 C_A$$

- Com $D_{AB} = D_s$ e **v** = 0, a equação se reduz a:

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = D_s \frac{\partial^2 C_s}{\partial x^2}$$

EXEMPLO – Difusão pura em material semi-infinito



C.I. $\left\{ C(x,0) = 0 \right.$

C.C. $\left\{ \begin{array}{l} C(0,t) = C_0(t) \\ C(\infty,t) = 0 \end{array} \right.$

- Por transformada de Laplace chega-se a solução:

$$C_s\,(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{D_s \pi}} \int_0^t C_0\,(\tau)\,\frac{e^{-x^2/[4D_s(t-\tau)]}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau$$