Exercício E2 - Solução
Mecânica dos Fluidos Ambiental I

Tobias Bleninger, Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Prédio Administração, 3º andar, sala 13

Tutores de estagio docência:
Rafael Bueno (rafael.bueno@ufpr.br), *Lediane Marcon* (lediane.engambiental@gmail.com)

A lista de exercícios E2 contem 2 partes:

a) Laboratório 4. Trabalho em grupo.
b) Teoria. Trabalho individual.

Cada parte recebe nota e a nota E2 é a média dos dois.

(Relatórios atrasados receberão a nota 0, os relatórios podem ser entregues na aula, deixados no escaninho, em baixo da porta ou entregue por colega de sala. Dos relatórios em grupo basta uma via. Os relatórios podem ser escritos manualmente ou usando softwares específicos. A parte teórica deve ser feita a mão.)

Exercício E2 (Parte teórica)

Este é a parte teórica da lista E1. Esta parte deve ser resolvida individualmente. Não é permitido copiar. O Relatório corrigido será devolvido depois e contará para a nota final.

Informações adicionais (software, livros, textos, etc.):
http://www.ambiental.ufpr.br/portal/professores/tobias/teaching/mecfluambi/

Boa sorte!

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Exercício	Pontos	Pontos	
1		**20**	
2		**25**	
3		**25**	
4		**20**	
5		**10**	Nota
Soma		**100**	**10,0**

(20 pontos) Exercício 1: Considere um escoamento bidimensional nas direções x e y, no qual as componentes de velocidade para cada direção são, respectivamente,

$$u(x,y,t) = -a\omega\, e^{-ky+i(kx-\omega t)};$$
$$v(x,y,t) = -ia\omega\, e^{-ky+i(kx-\omega t)}.$$

a) Mostre que a massa é conservada no escoamento.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \overset{?}{\to} 0$$
$$-ika\omega\, e^{-ky+i(kx-\omega t)} + ika\omega\, e^{-ky+i(kx-\omega t)} = 0$$

(+5)

b) Verifique se o escoamento é irrotacional.

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \overset{?}{\to} 0$$
$$+ka\omega\, e^{-ky+i(kx-\omega t)} - ka\omega\, e^{-ky+i(kx-\omega t)} = 0$$

Resposta: o escoamento é irrotacional

(+5)

c) Se o sistema é irrotacional, obtenha a expressão do potencial de velocidade do escoamento, caso contrário, explique porque o escoamento não possuí potencial de velocidade.

$$v(x,y,t) = \frac{\partial \phi(\mathrm{x,y})}{\partial y}$$

(+1)

$$\int \partial\phi(\mathrm{x,y}) = \int -ia\omega\, e^{-ky+i(kx-\omega t)}\partial y$$
$$\phi(\mathrm{x,y}) = -ia\omega\, e^{i(kx-\omega t)} \int e^{-ky}\partial y$$
$$\phi(\mathrm{x,y}) = \frac{ia\omega}{k}\, e^{-ky+i(kx-\omega t)} + C(x)$$

(+4)

$$u(x,y,t) = \frac{\partial \phi(\mathrm{x,y})}{\partial x}$$
$$-a\omega\, e^{-ky+i(kx-\omega t)} = -a\omega\, e^{-ky+i(kx-\omega t)} + \frac{\partial C(x)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial C(x)}{\partial x} = 0 \to C(x) = 0$$

$$\phi(\mathrm{x,y}) = \frac{ia\omega}{k}\, e^{-ky+i(kx-\omega t)}$$

(+5)

(25 pontos) Exercício 2: A Figura 1 (vista em planta) mostra um conjunto de tubulações circulares conectadas. Na tubulação principal, com raio 5R, escoa um fluido com massa ρ_1 e velocidade $u_1 = 0{,}96$ m/s (velocidade observada na região à montante do escoamento apresentado na Figura 1). Na seção A uma tubulação de raio R adentra o centro da tubulação principal e introduz um fluido 2 (de massa específica $\rho_2 = 4\rho_1$) com velocidade $u_2 (= 19{,}79 u_1)$. Na seção B os fluidos já estão completamente misturados. O fluxo segue até uma contração, que reduz a tubulação à um raio 4R. Dado que a diferença de pressão na seção AB é $\Delta P_{AB} = P_A - P_B = 4{,}34\, \rho_1 {u_1}^2$, encontre o valor de H em metros considerando que o fluido manométrico tem massa específica $\rho_m = 8\rho_1$.

Siga os passos das alternativas para a solução completa do exercício:

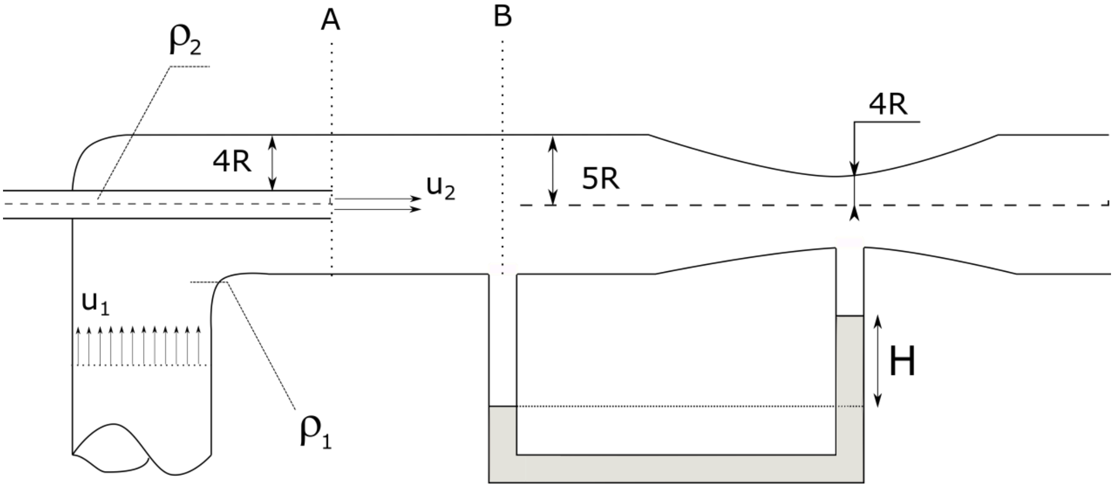


Figura 1. Sistema de tubulação com fluidos com massa específica diferente

a) Calcule a velocidade do fluido 1 na seção A.

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_1 u_{1A} A_{1A}$$
$$u_{1A} = u_1 \frac{A_1}{A_{1A}} = 0{,}96 * \frac{25R^2}{(25-1)R^2} = 1\, m/s$$

(+5)

b) Calcule a massa específica do fluido na seção B em função de ρ_1 e da velocidade da mistura (considere que os fluidos 1 e 2 já estão completamente misturados na seção B).

$$\rho_1 u_{1A} A_{1A} + \rho_2 u_2 A_{2A} = \rho_B u_B A_B$$
$$\rho_1 24R^2 + 4\rho_1 19{,}79 u_1 R^2 = \rho_B u_B 25R^2$$
$$\rho_B = 4\frac{\rho_1}{u_B}$$

(+5)

c) Calcule a velocidade do escoamento na seção B.

$$\int u\,\rho\,\overline{u}.\overline{dA} = \sum F_x$$
$$-u_{1A}\rho_1 u_{1A} 24R^2 - u_{2A}\rho_2 u_{2A} R^2 + u_B \rho_B u_B 25R^2 = F_A - F_B$$
$$-\rho_1 u_{1A}{}^2 24R^2 - 4\rho_1 u_{2A}{}^2 R^2 + 4\rho_1 u_B 25R^2 = (P_A - P_B)25R^2$$
$$-24\rho_1 - 4\rho_1 u_{2A}{}^2 + 100\rho_1 u_B = 25(4{,}34\,\rho_1 u_1{}^2)$$
$$-24 - 4u_{2A}{}^2 + 100u_B = 100$$
$$u_B = \frac{124 + 4(19{,}79u_1)^2}{100} = 15{,}68\, m/s$$

(+10)

d) Calcule a altura H no manometro.

$$\frac{P_B}{\rho_B g} + \frac{u_B{}^2}{2g} + h_B = \frac{P_C}{\rho_C g} + \frac{u_C{}^2}{2g} + h_C$$

$$\frac{P_B - P_C}{\rho_B} = \frac{u_C{}^2 - u_B{}^2}{2}$$
$$\frac{\Delta P_{BC}\, 15{,}68}{4\rho_1} = \frac{u_C{}^2 - 15{,}68^2}{2}$$
$$\Delta P_{BC} = \frac{4\rho_1(u_C{}^2 - 15{,}68^2)}{31{,}36}$$

$$u_B A_B = u_C A_C$$
$$u_C = \frac{u_B A_B}{A_C} = 15{,}68\frac{25\,R^2}{16\,R^2} = 24{,}5\, m/s$$

$$\Delta P_{BC} = \frac{4\rho_1(24{,}5^2 - 15{,}68^2)}{31{,}36} = 45{,}2025\rho_1$$
$$\rho_m g\, H = 45{,}2025\rho_1$$

$$H = \frac{45{,}2025}{8\, g} = 0{,}5760\; m = 57{,}6\; cm$$

(+5)

(25 pontos) Exercício 3: A Figura 2 mostra um projeto inacabado de um sistema de tubulação que captura água ($\rho_{água} = 1000$ kg/m³) de um tanque extremamente longo com nível de água de 3,5 metros. A tubulação inicialmente (entre as seções B e C) possuí raio igual a R_1. Entre as seções C e F a tubulação sofre uma expansão ($R_2 = 1{,}5\, R_1$). Logo em seguida, pricipalmente entre as seções F e G, a tubulação sofre uma contração, ficando mais fino do que a parte incial ($R_3 = 0{,}75\, R_1$). Entre as seções G e H ele ainda não foi dimensionado. Desconsidere todas as perdas.

Sabendo que ao longo do tanque foram espalhados piezometros e tubos de Pitot e que o piezômetro 1 incialmente terá nível de água na cota de 4,5 metros, determine:

a) A velocidade na seção BC.

$$\frac{P_0}{\rho_0 g} + \frac{{u_0}^2}{2g} + h_0 = \frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{{u_1}^2}{2g} + h_1$$
$$5{,}5 = 4{,}5 + \frac{{u_1}^2}{2g} \rightarrow u_1 = \sqrt{2g} = 4{,}43\; m/s$$

(+4)

b) O nível de água no tubo de Pitot 1. Adicione o valor também no desenho.

$$h_{pitot\;1} = 5{,}5\; m$$

(+1)

c) O nível de água no piezômetro 2. Adicione o valor também no desenho.

$$5{,}5 = h_{piezom\;2} + \frac{{u_2}^2}{2g} \rightarrow h_{piezom\;2} = 5{,}5 - \frac{{u_2}^2}{2g}$$

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$
$$u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2} = 4{,}43 \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2} = 4{,}43\, \frac{1}{1{,}5^2} = 1{,}97\; m/s$$

$$h_{piezom\;2} = 5{,}5 - \frac{1{,}97^2}{2g} = 5{,}3\; m/s$$

(+5)

d) O nível de água no piezômetro 3. Adicione o valor também no desenho.

$$h_{piezom\;3} = 5{,}5 - \frac{{u_3}^2}{2g}$$
$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_3 u_3 A_3$$
$$u_3 = u_1 \frac{A_1}{A_3} = 4{,}43 \frac{{R_1}^2}{{R_3}^2} = 4{,}43\, \frac{1}{0{,}75^2} = 7{,}88\; m/s$$

$$h_{piezom\;3} = 5{,}5 - \frac{7{,}88^2}{2g} = 2{,}34\; m$$

(+3)

e) O nível de água no tubo de Pitot 2. Adicione o valor também no desenho.

$$h_{pitot\;2} = 5{,}5\; m$$

(+1)

f) Sabendo que a pressão mínima recomendada para a conexão que será feita em H é 15000 Pa, calcule a cota máxima em que a tubulação pode ser contruida (seção entre GH) para que este critério seja atendido. Desenhe no gráfico a tubulação planejada.

$$h_{min} = \frac{P_{min}}{\rho_0 g} = 1{,}53\ m$$

$$h_{piezom\ 3} - h_{min} = 0{,}81\ m$$

(+3)

Desenho **(+2)**

g) Com a tubulação completa, desenhe a linha de energia e a linha piezométrica na figura (levando em conta as distâncias verticais). Atenção, as zonas de transição devido as variações dos diâmetros é limitado as seções AB, CD, e EF.

Linha de enegia **(+2)**
Linha Piezométrica **(+4)**

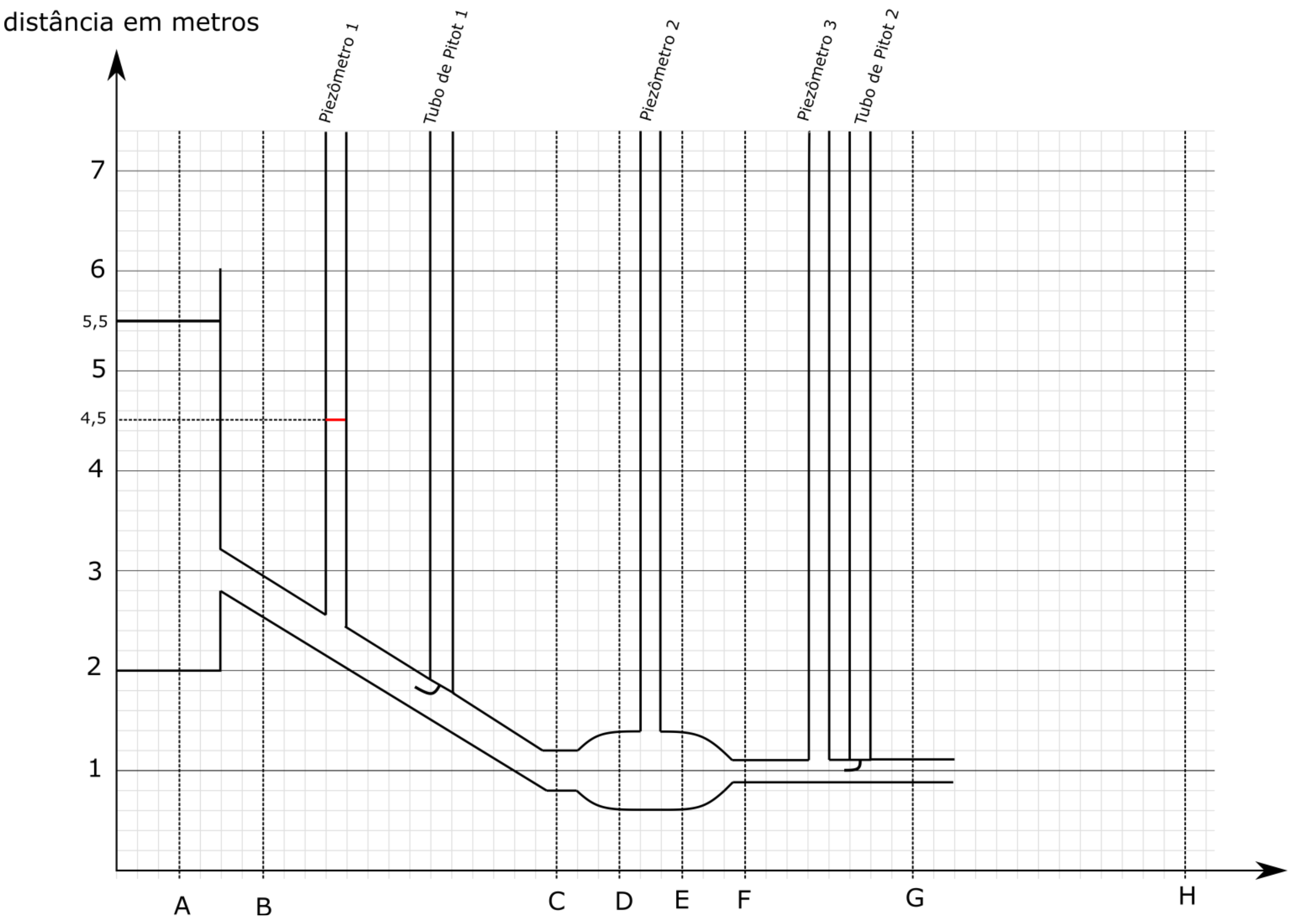
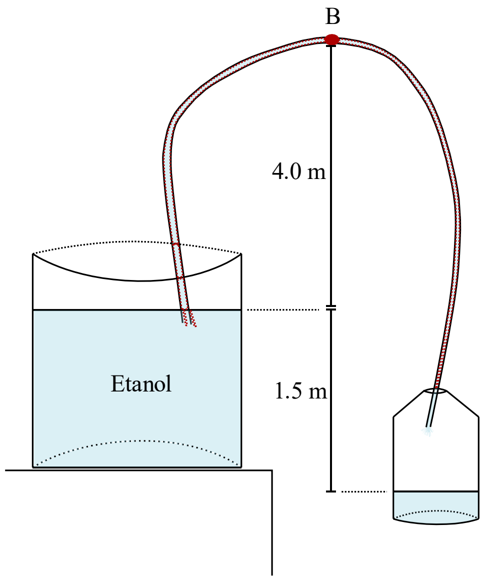


Figura 2. Sistema de tubulações.

(20 pontos) Exercício 4
Considere um tanque, de grande volume, contendo etanol. Uma pequena fração do volume será transferida para um recipiente utilizando uma mangueira com diâmetro de 1 cm, conforme o esquema a seguir:



Dados: $\rho_{etanol} = 789\,\frac{kg}{m^3}$; $p_{vapor\ gas} = 5.95\ kPa$; $P_{atm} = 101.3\ kPa$

Desconsidere efeitos do atrito entre a mangueira e o escoamento e determine:

a) Velocidade do etanol na mangueira. Indique as simplificações assumidas. Qual seria a velocidade se o fluido no tanque fosse água?

Simplificações **(+2)**

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A{}^2}{2g} + Z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B{}^2}{2g} + Z_B$$

$$v_B = (2gZ_A)^{1/2} \quad \rightarrow \quad v_B = \left(2 * 9{,}81\frac{m}{s^2} * 1.5m\right)^{1/2} = 5.42\ m/s$$

(+3)

A velocidade seria a mesma para outro fluido, já que não depende da massa específica.

(+3)

b) Determine a pressão na mangueira no ponto B;

$$\frac{P_C}{\rho g} + \frac{v_C{}^2}{2g} + Z_C = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B{}^2}{2g} + Z_B$$

$$P_B = P_C + \rho g(Z_C - Z_B)$$

$$P_B = 101300\ Pa + \left(789\,\frac{kg}{m^3} * 9.81\frac{m}{s^2} * (-5.5m)\right) = 58729.5\ Pa$$

(+5)

c) Qual a altura máxima possível de B para que o escoamento não seja interrompido?

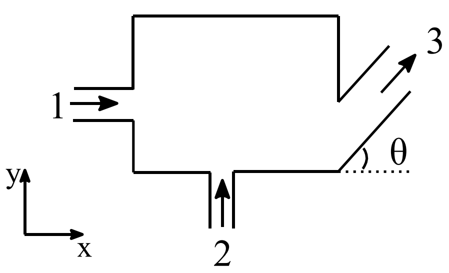
$$\frac{P_C}{\rho g} + \frac{v_C{}^2}{2g} + Z_C = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B{}^2}{2g} + Z_B$$

$$Z_B = \frac{P_C - P_B}{\rho g} + Z_C \quad \rightarrow \quad \frac{101300\ Pa - 5950\ Pa}{789\frac{kg}{m^3} * 9.81\frac{m}{s^2}} = 12.3\ m$$

(+7)

(10 pontos) Exercício 5

Uma caixa de passagem de água possui as seguintes configurações:



Em que as setas indicam a direção do escoamento. Em 2 $A_2 = \frac{1}{2}A_1$ e $V_2 = \frac{1}{2}V_1$; em 3 $A_3 = 2A_1$.

Considerando condições permanentes e massa específica da água constante, defina a velocidade 3 (V_3) em função da velocidade 1 (V_1), e as forças ($F_x \; e \; F_y$) atuando na caixa.

Da equação da continuidade

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 = A_3 v_3 \quad \rightarrow \quad A_1 v_1 + \frac{1}{2}A_1 \frac{1}{2} v_1 = 2A_1 v_3 \quad \rightarrow \quad v_3 = \frac{5}{8} v_1$$

(+4)

Quantidade de movimento linear

$$\sum F_{ext} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{vc} \vec{v}\rho \, dV + \int_{sc} \vec{v}\rho(\vec{V} d\vec{A})$$

Em x

$$F_x = \int_{sc} \vec{v}\rho(\vec{V} d\vec{A}) \quad \rightarrow \quad v_1(-\rho v_1 A_1) + v_3 cos\theta(-\rho v_3 A_1) = \rho {v_1}^2 A_1 \left(-1 + \frac{25}{32} cos\theta\right)$$

(+3)

Em y

$$F_y = \int_{sc} \vec{v}\rho(\vec{V} d\vec{A}) \quad \rightarrow \quad v_2(-\rho v_2 A_2) + v_3 sen\theta(\rho v_3 A_3) = \rho {v_1}^2 A_1 \left(-\frac{1}{8} + \frac{25}{32} sen\theta\right)$$

(+3)