Curitiba, 13.05.2019

Avaliação P2
Mecânica dos Fluidos Ambiental I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ____

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos	Pontos totais	
1		25	
2		15	
3		10	
4		25	
5		15	Nota
Soma		90	

1. (25P) A Figura 1 (vista em planta) mostra um conjunto de tubulações circulares conectadas. Na tubulação principal, com raio 5R, escoa um fluido com massa ρ_1 e velocidade $u_1 = 0{,}96$ m/s (velocidade observada na região à montante do escoamento apresentado na Figura 1). Na seção A uma tubulação de raio R adentra o centro da tubulação principal e introduz um fluido 2 (de massa específica $\rho_2 = 4\rho_1$) com velocidade $u_2 (= 19{,}79 u_1)$. Na seção B os fluidos já estão completamente misturados. O fluxo segue até uma contração, que reduz a tubulação à um raio 4R. Dado que a diferença de pressão na seção AB é $\Delta P_{AB} = P_A - P_B = 4{,}34\, \rho_1 {u_1}^2$, encontre o valor de H em metros considerando que o fluido manométrico tem massa específica $\rho_m = 8\rho_1$.

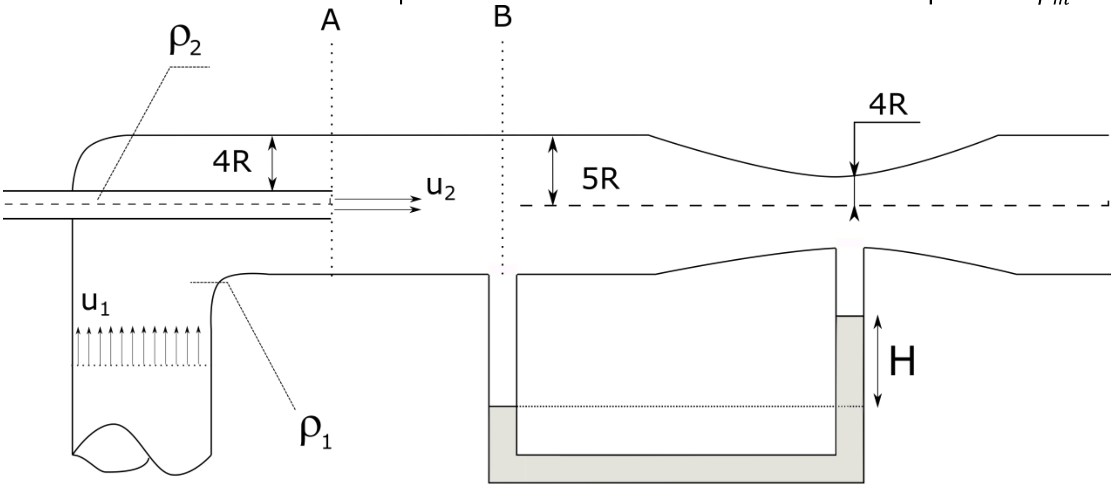


Figura 1. Sistema de tubulação com fluidos com massa específica diferente

Solução

a) Calcule a velocidade do fluido 1 na seção A.

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_1 u_{1A} A_{1A}$$
$$u_{1A} = u_1 \frac{A_1}{A_{1A}} = 0{,}96 * \frac{25R^2}{(25-1)R^2} = 1\, m/s$$

(+5)

b) Calcule a massa específica do fluido na seção B em função de ρ_1 e da velocidade da mistura (considere que os fluidos 1 e 2 já estão completamente misturados na seção B).

$$\rho_1 u_{1A} A_{1A} + \rho_2 u_2 A_{2A} = \rho_B u_B A_B$$
$$\rho_1 24R^2 + 4\rho_1 19{,}79 u_1 R^2 = \rho_B u_B 25R^2$$
$$\rho_B = 4\frac{\rho_1}{u_B}$$

(+5)

c) Calcule a velocidade do escoamento na seção B.

$$\int u\, \rho\, \overline{u}\, .\overline{dA} = \sum F_x$$
$$-u_{1A}\rho_1 u_{1A} 24R^2 - u_{2A}\rho_2 u_{2A} R^2 + u_B \rho_B u_B 25R^2 = F_A - F_B$$
$$-\rho_1 {u_{1A}}^2 24R^2 - 4\rho_1 {u_{2A}}^2 R^2 + 4\rho_1 u_B 25R^2 = (P_A - P_B)25R^2$$
$$-24\rho_1 - 4\rho_1 {u_{2A}}^2 + 100\rho_1 u_B = 25(4{,}34\, \rho_1 {u_1}^2)$$
$$-24 - 4{u_{2A}}^2 + 100u_B = 100$$
$$u_B = \frac{124 + 4(19{,}79u_1)^2}{100} = 15{,}68\, m/s$$

(+10)

d) Calcule a altura H no manometro.

$$\frac{P_B}{\rho_B g} + \frac{{u_B}^2}{2g} + h_B = \frac{P_C}{\rho_C g} + \frac{{u_C}^2}{2g} + h_C$$

$$\frac{P_B - P_C}{\rho_B} = \frac{{u_C}^2 - {u_B}^2}{2}$$

$$\frac{\Delta P_{BC}\,15{,}68}{4\rho_1} = \frac{{u_C}^2 - 15{,}68^2}{2}$$

$$\Delta P_{BC} = \frac{4\rho_1({u_C}^2 - 15{,}68^2)}{31{,}36}$$

$$u_B A_B = u_C A_C$$

$$u_C = \frac{u_B A_B}{A_C} = 15{,}68\frac{25\,R^2}{16\,R^2} = 24{,}5\;m/s$$

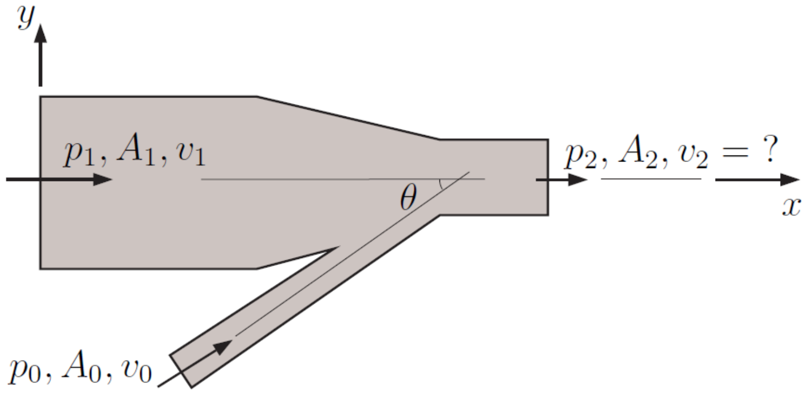
$$\Delta P_{BC} = \frac{4\rho_1(24{,}5^2 - 15{,}68^2)}{31{,}36} = 45{,}2025\rho_1$$

$$\rho_m g\;H = 45{,}2025\rho_1$$

$$H = \frac{45{,}2025}{8\;g} = 0{,}5760\;m = 57{,}6\;cm$$

(+5)

2. (15P) A figura (vista em planta) ilustra o escoamento permanente de um fluido incompressível através de uma junção de tubulações. Considerando dados a massa especifica, v_0, v_1, A_0, A_1, A_2, e as pressões nas seções 0, 1, e 2, dadas por p_0, p_1, e p_2, calcule o vetor força da água sobre este trecho de tubulação. (Admita que as velocidades e pressões são uniformes nas seções.)



Solução

As equações para a solução deste problema são as de balanço de massa e de quantidade de movimento em x e y:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c}\rho dV + \int_{S_c}\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS, \qquad (7.91)$$

$$F_{sx} + F_{cx} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} v_x\rho dV + \int_{S_c} v_x\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS, \qquad (7.92)$$

$$F_{sy} + F_{cy} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} v_y\rho dV + \int_{S_c} v_y\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS. \qquad (7.93)$$

Sendo o escoamento permanente, tem-se que todos os termos com $\frac{\partial}{\partial t}$ são nulos. Tomando como volume de controle o próprio contorno da tubulação. A equação de conservação de massa reduz-se ao balanço de fluxos nas seções 1, 2, e 3, e fornece a velocidade v_2:

$$\int_{S_c} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS = \rho\,(-v_0A_0 - v_1A_1 + v_2A_2) = 0, \qquad (7.94)$$

$$v_2 = \frac{v_0A_0 + v_1A_1}{A_2}. \qquad (7.95)$$

A equação dinâmica na direção x torna-se:

$$\begin{aligned} F_{sx} &= \int_{S_c} v_x\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \\ &= -v_0\cos\theta\rho v_0A_0 - v_1\rho v_1A_1 + v_2\rho v_2A_2, \qquad (7.96) \end{aligned}$$

e na direção y dá:

$$F_{sy} = \int_{S_c} v_y\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS = -v_0\,\mathrm{sen}\,\theta\rho v_0A_0. \qquad (7.97)$$

As forças de superfície atuando sobre a superfície de controle são a combinação das forças devido às pressões nas seções com as forças (F_x, F_y) do conduto sobre o fluido:

$$\begin{aligned} F_{sx} &= p_0A_0\cos\theta + p_1A_1 - p_2A_2 + F_x, \qquad (7.98) \\ F_{sy} &= p_0A_0\,\mathrm{sen}\,\theta + F_y, \qquad (7.99) \end{aligned}$$

que substituídas nas equações dinâmicas fornecem:

$$\begin{aligned} F_x &= -\rho v_0^2\cos\theta A_0 - \rho v_1^2A_1 \\ &\quad + \rho v_2^2A_2 + p_2A_2 - p_1A_1 - p_0A_0\cos\theta, \qquad (7.100) \\ F_y &= -\rho v_0^2A_0\,\mathrm{sen}\,\theta - p_0A_0\,\mathrm{sen}\,\theta. \qquad (7.101) \end{aligned}$$

A força da água sobre a junção dos condutos é a reação a (F_x, F_y):

$$\mathbf{F} = -(F_x, F_y). \qquad (7.102)$$

3. (10P) O escoamento da **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** pode ser descrito com a equação

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Qual é a vazão se o canal tem a largura de B = 5 m e profundidade de h = 2 m e a velocidade máxima de u_{max} = 3 m/s?

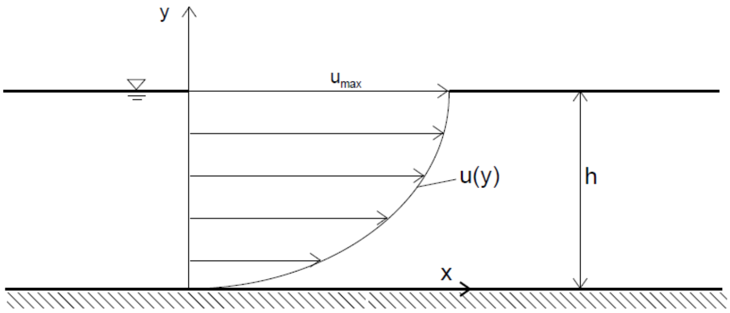
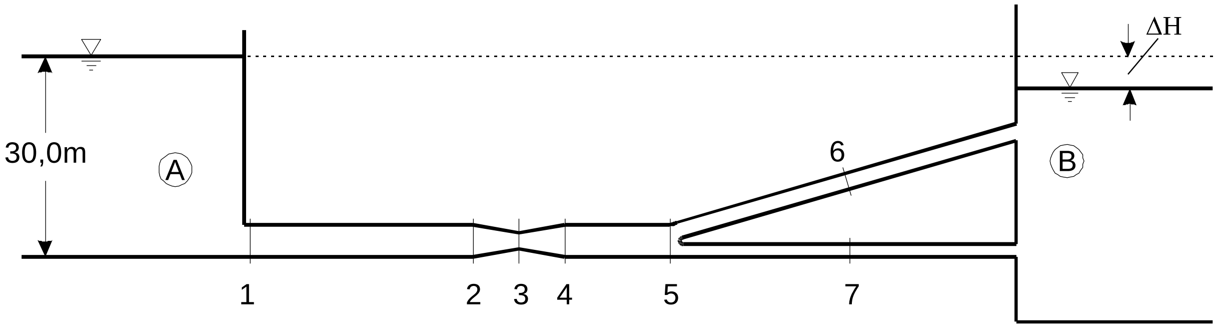


Fig. 1: Escoamento

Solucao:

$$Q = \int_A u\,dA = \int_0^h u_{max}\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot B\,dy = \frac{u_{max}B}{h^{\frac{1}{2}}}\int_0^2 y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{5\ m\cdot 3\ m/s}{2^{\frac{1}{2}}}\cdot\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = 20\,\frac{m^3}{s}$$

4. (25) Um grande tanque A alimenta um tanque B através uma tubulação ($d_1 = d_2 = d_4 = d_5 = 0{,}2$ m, $d_3 = d_6 = 0{,}1$ m). Entre a seção 2 e 3 foi medido a diferença da altura de pressão de 20m. Atrito na tubulação pode ser desconsiderado.
    a. Qual é a vazão na tubulação?
    b. Calcule o diâmetro d_7 para que na seção 6 passa o dobro da vazão que na seção 7.
    c. Calcule a diferença entre os níveis dos tanques.
    d. Desenha a linha de energia e linha piezométrica.



5.6.1:

$$H = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$z_2 = z_3$$

$$\frac{p_2 - p_3}{\gamma} = \Delta h$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} \quad ; \quad V_3 = \frac{Q}{A_3}$$

$$z_2 + \Delta h + \left(\frac{1}{A_2}\right)^2 \frac{Q^2}{2g} = z_3 + \left(\frac{1}{A_3}\right)^2 \frac{Q^2}{2g}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{1}{A_3^2} - \frac{1}{A_2^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 20\ m}{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}1^2 m^2\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}2^2 m^2\right)^2}}} = 0{,}16\ \frac{m^3}{s}$$

5.6.2:
Für die Rohre 6 und 7 stimmen Energielinie und Drucklinie überein, d.h. die Geschwindigkeits- höhen sind gleich.

$$\frac{V_6^2}{2g} = \frac{V_7^2}{2g}$$

$$V_6 = V_7$$

$$Q_6 \quad = \quad 2Q_7$$

$$V_6 \frac{\pi}{4} d_6^2 = \ 2V_7 \frac{\pi}{4} d_7^2 = 2V_6 \frac{\pi}{4} d_7^2$$

$$d_6^2 = 2d_7^2$$

$$d_7 = \frac{d_6}{\sqrt{2}} = 0{,}0707\ m$$

5.6.3:

$$H = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_7 + \frac{p_7}{\gamma} + \frac{V_7^2}{2g}$$

$$z_A = 30\ \mathrm{m}$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = 0$$

$$V_A \approx 0$$

$$z_7 = 0$$

$$\frac{p_7}{\gamma} = z_A - \Delta H$$

$$V_7 = \frac{\frac{1}{3}Q}{A_7} = \frac{\frac{1}{3}Q}{\frac{\pi}{4}d_7^2}$$

$$H = z_A + 0 \ + 0 = 0 + z_A - \Delta H + \frac{V_7^2}{2g}$$

$$\Delta H = \frac{V_7^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{\frac{1}{3}Q}{\frac{\pi}{4}d_7^2}\right)^2 = \frac{1}{2 \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}16\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}{\frac{\pi}{4}\cdot(0{,}0707\ \mathrm{m})^2}\right)^2 = 9{,}40\ \mathrm{m}$$

5. (15P) Avalie as frases seguintes, escrevendo se são verdadeiras ou falsas (*resposta certa: pontuação positiva (+2P); resposta errada: meia pontuação negativa (-1P); sem resposta: 0P, justificativa certa: pontuação positiva (+1P); pontuação mínima nesta questão: 0)*:
   a. "Quando a linha piezométrica fica acima da tubulação em consideração há pressão negativa e risco de cavitação."

      ☐ a afirmação é verdadeira

      ☐ a afirmação é falsa, cavitação pode ocorrer em regiões com pressão negativa (quando a LP é abaixo da tubulação)

   b. "Na equação integral de conservação de energia e na da conservação de quantidade de movimento admita-se que os perfis de velocidade são quase uniformes e assim permitindo a utilização de fatores alpha e beta igual a unidade."

      ☐ a afirmação é verdadeira, escoamentos turbulentos são “bem” misturados e apresentam valores de alpha e beta próxima a 1

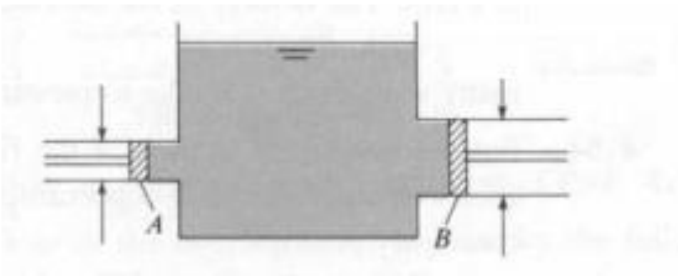
      ☐ a afirmação é falsa

   c. "Um tubo de pitot permite a determinação da altura da linha piezométrica em uma tubulação."

      ☐ a afirmação é verdadeira

      ☐ a afirmação é falsa, energia

   d. Considerando a figura seguinte e que os dois pistões do tanque com água se movimentam para esquerda e o pistão A (diâmetro D_A = 1m) se movimenta duas vezes mais rápido que pistão B (diâmetro = 2m): “O nível no tanque fica constante."



☐ a afirmação é verdadeira

☐ a afirmação é falsa

<u>Solução</u>
$V_A A_A - V_A/2\, A_B + V_T A_T = 0$ (considerando um aumento do nível)
$-7/4 V_1 \pi + V_T A_T = 0$
$V_T > 0$ (confirmando a consideração)
Nível sobe.

e. "Considere uma linha de energia constante e a linha piezométrica inclinada (descendo em direção do escoamento) significa que o fluido decelera."

☐ a afirmação é verdadeira

☐ a afirmação é falsa, acelera, velocidade cresce

Equações dadas:

Conservação de massa de fluido:
$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho dV_c + \int_{S_c} \rho(\vec{V}\cdot d\vec{A}) = 0$ com V_c: volume de controle, S_c: superfície de controle, ρ: massa especifica, t: tempo, $\vec{V}$: vetor velocidade, $\vec{A}$: vetor área normal

Conservação de massa de um soluto:
$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} C_a\rho dV_c + \int_{S_c} C_a\rho(\vec{V}\cdot d\vec{A}) = \int_{S_c} D\nabla(\mathrm{C_a}\rho)d\vec{A}$ com C_a: concentração do soluto e D: difusividade molecular

Conservação de calor:
$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} Tc_p\rho dV_c + \int_{S_c} Tc_p\rho(\vec{V}\cdot d\vec{A}) = \int_{S_c} D_T\nabla(\mathrm{Tc_p}\rho)d\vec{A}$ com T: temperatura e D_T: difusividade térmica

Conservação de quantidade de movimento:
$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho\vec{V} dV_c + \int_{S_c} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot d\vec{A}) = \sum_{V_c}\vec{F_B} + \sum_{S_c}\vec{F_S}$ com $\vec{F_B}$: forcas do corpo e $\vec{F_S}$: forcas superficiais

Equação de Bernoulli:
$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = const.$